Seria I

Zad. 1. Wykaż za pomocą indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:
a. $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2(n+1)}$
b. $\sum_{k=1}^{n} (2k+1)^2 = \frac{1}{3}(n+1)(4n^2 + 8n + 3)$
c. $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$
d. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \sqrt{n} + 1$
e. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$
f. $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

Zad. 2. Wykaż za pomocą indukcji matematycznej, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$:
a. $n^7 - n$ jest podzielne przez 7
b. $3^{4n+2} + 1$ jest podzielne przez 10
c. $n \cdot 7^n - 3n$ jest podzielne przez 4

Zad. 3. Niech $(x_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zdefiniowanym rekurencyjnie: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+x_n}$. Udowodnij, że dla dowolnych $m, n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$x_{m+n} = \frac{2 + x_m x_n}{x_m + x_n}$$

Zad. 4. Niech $(x_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zdefiniowanym rekurencyjnie: $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2+x_n}$. Udowodnij, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ zachodzi

$$2x_{2n} = \frac{1 + x_n^2}{1 + x_n}$$

Zad. 5. Dowiedź, ze liczby Fibonacciego, zdefiniowane rekurencją $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ spełniają równość

$$F_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

gdzie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Zad. 6. Znajdź kresy podanych zbiorów. Odpowiedzi uzasadnij.
a. $\{\frac{n-10}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+\}$
b. $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$

c. $\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x+4|}{|x+2|} < x\}$
d. $\{x + \frac{1}{2x} : x \in]a, b[\}$, $0 < a < b$ (rozpatrz różne możliwe przypadki)
e. $\{\sin \frac{1}{x} : x \in]0, a[\}$, $a > 0$
f. $\{x > 0 : \sin x = \frac{\pi}{2x}\}$
g. $\{x - 5\lfloor \frac{x}{5} \rfloor : x \in \mathbb{R}\}$
h. $\{n - 5\lfloor \frac{n}{5} \rfloor : n \in \mathbb{N}\}$

Zad.7. Oblicz granice podanych ciągów:
a. $\frac{25^n+7}{3 \cdot 5^{2n}+4}$
b. $\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n-\sqrt[3]{n^2+8}}$
c. $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}-\sqrt{n^2+2}}$
d. $\sqrt[3]{n^3+2n^2+4} - \sqrt[3]{n^3+1}$
e. $\sqrt[n]{n^{100}+n^{99}+1}$
f. $\sqrt[2n]{3^n+4^n}$
g. $\frac{1}{2n}\cos(n^3) - \frac{3n}{6n+1}$
h. $\frac{n!}{1+2^n+3^n+6^n}$
i. $\frac{\log_2(n^5)}{\log_8 n}$
j. $\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$
k. $\left(\frac{n^2}{n^2+6}\right)^{n^2}$
l. $\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-n+3}$
m. $n \cdot \ln\left(\frac{n+3}{n}\right)$
n. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n^2+k}}$
o. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{(k+2)(k+3)}$
p. $\sin\sqrt{n+1} - \sin\sqrt{n}$
q. $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$
r. $\frac{1}{n}\sqrt[10]{\sum_{k=1}^{n} k^9}$

Zad. 8. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie:
a. $x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$, $x_1 \in]-1, 2[$
b. $x_{n+1} = \frac{x_n-2}{x_n-1}$, $x_1 > 1$
c. $x_{n+1} = \frac{3x_n+1}{5x_n-1}$, $x_1 > \frac{1}{5}$
d. $x_{n+1} = \sqrt{2-x_n}$, $x_1 = 0$
e*. $x_{n+1} = \frac{10}{1+x_n^2}$, $x_1 \in \mathbb{R}$. Wskazówka: ciąg ten nie jest zbieżny. Rozważyć rekurencję spełnioną przez ciąg $a_n = x_n - 2$.