II seria zadań domowych z Analizy I
18.11.2015

Zadanie 1. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n^n+1}{(n+1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi(n^2+n-1)}{n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin \frac{\pi}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})^{\alpha} \ \ (\alpha \in \mathbf{R} - \text{parametr}),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2+n}{1+n^2})^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(10 - 9\sqrt[n]{5}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{a+b\log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n - \cos n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10\sin n}\right) \sin n\alpha, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n+10\sin n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 2)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}}{2} - \sqrt{2n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[n]{n^2+1}}}{2^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2\pi}{n+1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (2 - \sqrt[n]{n})^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt[n]{n^3+n}.$$

Zadanie 2. Wykazać z definicji, że

$a)$ $\lim_{x\to 1^-} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0;$ $\quad b)$ $\lim_{x\to 1^+} \exp\left(\frac{1}{x-1}\right) = \infty;$ $\quad c)$ $\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0.$

Zadanie 3. Obliczyć następujące granice:

$a)$ $\lim_{x\to -1} \frac{x^4+3x^2-4}{x+1};$ $\quad b)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x};$ $\quad c)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x};$ $\quad d)$ $\lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}};$

$e)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x};$ $\quad f)$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x};$ $\quad g)$ $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x};$ $\quad h)$ $\lim_{x\to 0} x \operatorname{ctg} x;$

$i)$ $\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^3-1});$ $\quad j)$ $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{2x-5};$ $\quad k)$ $\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{tg}(kx+x^2/\pi)}{\operatorname{tg}(nx+x^2/\pi)}$ $\quad k, n \in \mathbb{N}.$

Zadanie 4. Obliczyć (jeśli istnieją) granice: lewo-, prawo- i dwustronne następujących funkcji w następujących punktach:

$a)$ $f(x) = e^{-1/x}$ w punkcie $x = 0;$ $\quad b)$ $f(x) = \frac{|x-1|}{x-1} + x$ w punkcie $x = 1;$

$c)$ $f(x) = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{1-x}$ w punkcie $x = 1;$ $\quad d)$ $f(x) = \frac{x}{x-2}$ w punkcie $x = 2;$

$e)$ $f(x) = x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ w punkcie $x = 0;$ $\quad f)$ $f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|x-\frac{\pi}{2}|}$ w punkcie $x = \frac{\pi}{2}.$

Zadanie 5. Dobrać parametry a, b, c tak, żeby funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określone następująco:

$$a)\ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & \text{dla } \ x < 0 \\ \frac{x^3-1}{x^2+x-2} & \text{dla } \ 0 \leq x < 1 \\ c & \text{dla } \ x = 1 \\ \frac{x^2+(b-1)x-b}{x-1} & \text{dla } \ x > 1 \end{cases}; \qquad b)\ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{a/x}} & \text{dla } \ x \neq 0 \\ b & \text{dla } \ x = 0 \end{cases}.$$

były ciągłe na $\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Wykazać ciągłość poniższych funkcji w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ korzystając z definicji Heinego lub Cauchy'ego.

$a)$ $f(x) = 3x + 1$; $\quad b)$ $f(x) = \cos x$; $\quad c)$ $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$;

$d)$ $f(x) = e^x$; $\quad d)$ $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\ x_0 \neq 0$; $\quad e)$ $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$, $\ x_0 \neq 0$

Zadanie 7. Opierając się na definicji jednostajnej ciągłości funkcji pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $[1, \infty)$, ale nie jest jednostajnie ciągła w przedziale $(0, \infty)$.

Zadanie 8. Opierając się na definicji jednostajnej ciągłości funkcji pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $(0, 2)$, ale nie jest jednostajnie ciągła w przedziale $(0, \infty)$.

Zadanie 9. Opierając się na definicji jednostajnej ciągłości funkcji pokazać, że funkcja $f(x) = |x|$ jest jednostajnie ciągła w zbiorze $\mathbb{R}$.