Praca domowa III

Macierz morfizmu

Zadanie 1. Wyznaczyć macierz

- odwzorowania $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1 + 2x_2, x_2 + 3x_3)$ względem bazy wektorów jednostkowych $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$,
- obrotu płaszczyzny o kąt α względem dowolnej bazy $\{e_1 := (\lambda_1, \mu_1), e_2 := (\lambda_2, \mu_2)\}$ takiej, że $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0$ i $\lambda_1^2 + \mu_1^2 = \lambda_2^2 + \mu_2^2 = 1$,
- obrotu przestrzeni trójwymiarowej o kąt $2\pi/3$ wokół prostej, danej w prostokątnym układzie współrzędnych równaniem $x_1 = x_2 = x_3$, względem bazy złożonej z jednostkowych wektorów osi współrzędnych.

Zadanie 2. Dane przekształcenie $f : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}_2[\cdot]$ postaci

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_1 + a_0) + (a_0 + a_1 + a_2)x + a_1x^2,$$

sprawdź, że f jest funkcją liniową i wyznacz macierz $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ tej funkcji w bazach

1. $\mathcal{A} := \{e_1 := 1, e_2 := x, e_3 := x^2\}$, $\quad \mathcal{B} := \{f_1 := 1 + x, f_2 =: 1 + x^2, f_3 := 1 - x\}$,
2. $\mathcal{A} := \{e_1 := 1 + x, e_2 := 1, e_3 := x^2\}$, $\quad \mathcal{B} := \{f_1 := 1, f_2 =: 1 + x^2, f_3 := 1 - x\}$,
3. $\mathcal{A} := \{e_1 := 1, e_2 := x, e_3 := x^2\}$, $\quad \mathcal{B} := \{f_1 := 1, f_2 =: x, f_3 := x^2\}$.

Określ $\mathrm{Im} f$, $\ker f$, oraz bazy tych przestrzeni i ich wymiary. Czy f jest bijekcją?

Zadanie 3. Czy przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ posiadające w bazie standardowej e macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

jest bijekcją?

Zadanie 4. Dane liniowe przekształcenie $f : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}_2[\cdot]$ takie, że

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + a_2x + a_1x^2,$$

wyznacz macierz $[f]_a^a$ w bazach standardowych. Wyznacz obraz ($\mathrm{Im} f$) i jądro ($\ker f$) tego przekształcenia. Podaj bazy tych przestrzeni i ich wymiary.

Macierz odwrotna i metoda Gaussa

Zadanie 5. Wyznacz macierz odwrotną poniższej macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6. Wyznacz macierze odwrotne poniższych macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Czy da się ustalić takie macierze bezpośrednio?

Zmianna bazy

Zadanie 7. Niech $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie morfizmem takim, że $T(e_i) = \lambda_i e_i$ dla $i = 1, 2, 3$ w bazie $\mathcal{B}_1 = \{e_1 = (1, 2, 3), e_2 = (-1, 1, 2), e_3 = (-1, 0, 1)\}$. Podaj macierz $[T]^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}_2}$ morfizmu T w bazie $\mathcal{B}_2 = \{e_1 = (1, 0, 1), e_2 = (0, 1, 2), e_3 = (-1, 1, 0)\}$. Napisz macierz przejścia z $\mathcal{B}_2$ do $\mathcal{B}_1$.

Zadanie 8. Niech $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ będzie morfizmem takim, że $T^2 = T$. Wykaż, że istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ dla której

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 9. Niech operator liniowy w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$ będzie reprezentowany macierzą

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

względem bazy $\{1, x, x^2\}$. Wyznaczyć jego macierz względem bazy $\{3x^2 + 2x + 1, x^2 + 3x + 2, 2x^2 + x + 3\}$.

Macierz transponowana

Zadanie 10. Niech $T : \mathbb{R}_3[\cdot] \to \mathbb{R}_3[\cdot]$ będzie morfizmem $(Tw)(x) = w'(x) - w(0)$. Oblicz macierz $[T]_{\mathcal{B}}^{\bar{\mathcal{B}}}$ morfizmu T w bazach $\bar{\mathcal{B}} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i $\mathcal{B} = \{-1, 1 + x, 1 + x^2, x^3 - 1\}$. Oblicz macierze $[T^T]_{\mathcal{B}^*}^{\bar{\mathcal{B}}^*}$ i $[T^T]_{\bar{\mathcal{B}}^*}^{\bar{\mathcal{B}}^*}$ morfizmu transponowanego T^T dla baz dualnych $\mathcal{B}^*$ do $\mathcal{B}$ i $\bar{\mathcal{B}}^*$ do $\bar{\mathcal{B}}$.

Zadanie 11. Niech $T : E \to F$ będzie odwzorowaniem liniowym z E do F, gdzie E i F są przestrzeniami liniowymi skończonego wymiaru. Wykaż, że jeżeli T jest surjekcją to T^T jest injekcją i jeżeli T jest injekcją to T^T jest surjekcją.

Permutacje

Zadanie 12. Obliczyć inwersje, znak oraz rząd permutacji:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m+1 & m+2 & m+3 & \dots & 2m+1 \\ 1 & 3 & \dots & 2m+1 & 2 & 4 & \dots & 2m \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2m & 2m+1 & 2m+2 & \dots & 3m \\ m+1 & m+2 & \dots & 3m & 1 & 2 & \dots & m \end{pmatrix},$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m & m+1 & m+2 & \dots & 2m \\ 1 & 3 & \dots & 2m-1 & 2 & 4 & \dots & 2m \end{pmatrix}.$$

Zadanie 13. Niech $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dowieść, że dany podzbiór $X \subset S_n$ generuje grupę S_n, tzn. że każdy element grupy S_n można przedstawić jako iloczyn potęg pewnych elementów zbioru X z wykładnikami całkowitymi:

- $X := \{(12), (23), (34), \dots, (n-1n)\} = \{(i\ i+1) : i \in \{1, 2, \dots, n-1\}\}$,
- $X := \{(12), (13), (14), \dots, (1n)\} = \{(1\ j) : j \in \{2, \dots, n\}\}$,
- $X := \{(123\dots n), (23\dots n)\}$.

Zadanie 14. Przedstawić daną permutację w postaci złożenia cykli rozłącznych:

- $(12)(123)(1234)(12345)$,
- $(12)(123)(1234)(12345)(123456)(1234567)$,
- $(1234)(3456)(5678)$.

Zadanie 15. Ile jest permutacji $\sigma : \{1, \dots, 10\} \to \{1, \dots, 10\}$, spełniających warunek

$$\forall k \in \{1, \dots, 10\} : (|\sigma(k) - k| \leq 1 \text{ lub } |\sigma(k) - k| = 9)?$$

Zadanie 16. Sprawdzić, że wzór $\sigma(x) = 3x + 7 - 16[(x+1)/5]$ określa permutację $\sigma : X \to X$ zbioru $X := \{1, \ldots, 16\}$; znaleźć jej tabelkę wartości i rozkład na cykle rozłączne.

Ślad i wyznacznik operatora

Zadanie 17. Obliczyć ślad $\operatorname{tr} F$ i wyznacznik $\det F$ operatora $F \in \mathrm{End}V$, jeżeli $V = \mathbb{R}_n[t]$, $a \in \mathbb{R}$, natomiast F ma następującą postać:

- $(Fw)(t) = tw'(t) + aw(t)$,
- $(Fw)(t) = w(t+a)$,
- $(Fw)(t) = t^n w(1/t)$.

Zadanie 18. Obliczyć ślad i wyznacznik operatora liniowego F działającego w przestrzeni wielomianów $\mathbb{R}_2[t]$ i danego wzorem:

$$(Fw)(t) = 4w(t) + \frac{3}{t}[w(t) - w(0)] + t[w(t) - \frac{t^n}{n!}w^{(n)}(0)] \cdot \int_{-1}^{1} w(t)dt.$$

Zadanie 19. Obliczyć ślad operatora liniowego $F : E \to E$ na przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej danego wzorem $F = A \circ B - B \circ A$, gdzie A i B są dowolnymi endomorfizmami na E.