Zadania z Analizy Matematycznej "C"
Seria 5.

1. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:
(a) $f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
(b) $f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
(c) $f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$, $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$;
(d) $f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
(e) $f(x) := (x+1)\operatorname{arc\,tg} x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Niech $a, b \in \mathbb{R}$. Dowieść, że: (1) jeśli $b > 0$, to $ab \leqslant e^{a-1} + b\log b$; (2) jeśli $a \neq b$, to $e^{\frac{1}{2}(a+b)} < \frac{e^a - e^b}{a-b} < \frac{e^a+e^b}{2}$.

3. Dowieść, że: (a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ dla $x > 0$;
(b) $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$;
(c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$;
(d) $(4 - \cos x)\frac{\sin x}{x} < 3$ dla $x \neq 0$;
(e) $|\frac{1+x}{x}\operatorname{arc\,tg} x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$;
(f) $1 + x\log(x + \sqrt{1+x^2}) \geqslant \sqrt{1+x^2}$.

4. Dowieść, że funkcja $f(x) := (1+x)^{1/x}$, $-1 < x \neq 0$, da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na $]-1,\infty[$. Obliczyć $f(0)$ i $f'(0)$ oraz wykazać, że funkcja $x \mapsto f(x)$ jest malejąca, a $x \mapsto (1+x)f(x)$ — rosnąca na $]-1,\infty[$.

5. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}, & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że f jest: (a) klasy C^1 na $\mathbb{R}$ (wyliczyć $f'(0)$); (b) malejąca; (c) jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Sprawdzić, że funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta.

6. Dowieść, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

7. Sprawdzić, że: (a)$\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}f(\frac{1}{x})) = (-1)^n x^{-n-1} f^{(n)}(\frac{1}{x})$ dla $n \in \mathbb{N}$, jeśli $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna n-krotnie; (b) $S(f) = S(g)$, jeśli $S(f) := \frac{f^{(3)}}{f^{(1)}} - \frac{3}{2}(\frac{f^{(2)}}{f^{(1)}})^2$, f jest 3-krotnie różniczkowalna oraz $g(x) = \frac{a_1 f(x) + b_1}{af(x)+b}$.

8. Dowieść, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_k \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, to $\exists\, x \in]0,1[$: $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0$.

9. Niech $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną, taką że f'' jest ograniczona i istnieje skończona granica $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Wykazać, że $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$. Sprawdzić te założenia i tezę dla $f(x) := \frac{1}{x}\sin(x^2)$.

10. Dowieść, że jeśli $f:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $\exists\ c > 0, \alpha \leqslant 1$: $\lim_{x\to\infty}[f(x) + cx^\alpha f'(x)] = 0$, to $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Skonstruować przykłady, uzasadniające istotność poczynionych założeń $c > 0, \alpha \leqslant 1$.

11. Dowieść, że jeśli ciągła na $[0,1]$ i dwukrotnie różniczkowalna na $]0,1[$ funkcja f spełnia warunki $f(0) = f(1) = 0$ oraz $\inf_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = -1$, to istnieje $\xi \in]0,1[$, takie że $f''(\xi) \geqslant 8$. Pokazać, że tego oszacowania nie da się poprawić.

12. Niech $T > 0,\ f: [0,T]\to\mathbb{R}$ dwukrotnie różniczkowalna, przy czym $f(T) - f(0) =: L > 0,\ f'(0) = f'(T) = 0$. Wykazać, że istnieje $t \in]0,T[$ takie, że $|f''(t)| \geqslant 4T^{-2}L$. *Interpretacja.* Punkt materialny, poruszający się tak, że od startu do zatrzymania przebywa drogę L w czasie T, musi mieć w pewnej chwili przyspieszenie $\geqslant 4T^{-2}L$.

13. Niech $f: [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i dwukrotnie różniczkowalną na $]a,b[$. Wykazać, że jeśli $f(a) = f(b)$ oraz $M_2 := \sup_{a<x<b}|f''(x)| < +\infty$, to $M_1 := \sup_{a<x<b}|f'(x)| \leqslant \frac{b-a}{2}M_2$. Sprawdzić to dla $f(x) := (x-a)(b-x)$.

14. Niech funkcja $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna; oznaczmy $M_k := \sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|$ dla $k \in \{0,1,2\}$. Dowieść, że jeśli kresy M_0 i M_2 są skończone, to $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$, przy czym oszacowania tego nie da się poprawić.

15. Dowieść, że: (a) Jeśli $n \in \mathbb{N},\ x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, funkcja $f: [x_0,x_n]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[x_0,x_1]$ i n-krotnie różniczkowalna na $]x_0,x_1[$ oraz $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$, to $\exists\ \xi \in]x_0,x_n[$: $f^{(n)}(\xi) = 0$. (b) Jeśli $\varphi: [a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i dwukrotnie różniczkowalna na $]a,b[$, to $\exists\ \xi \in]a,b[$: $\varphi(a) - 2\varphi(\frac{a+b}{2}) + \varphi(b) = (\frac{b-a}{2})^2\varphi''(\xi)$.

16. Załóżmy, że $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ (może być $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) jest ciągła oraz ma skończone granice jednostronne $l_1 := \lim_{x\to a+} f(x), l_2 := \lim_{x\to b-} f(x)$. Dowieść, że: (a) f jest ograniczona na $]a,b[$; (b) jeśli $l_1 = l_2$, to f przyjmuje co najmniej jeden ze swoich kresów na $]a,b[$; (c) jeśli $l_1 = l_2$ i f jest różniczkowalna, to $\exists\ \xi \in]a,b[$: $f'(\xi) = 0$.

17. Dowieść, że jeśli funkcja $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ (dopuszczamy $a = -\infty$ lub $b = +\infty$) jest n-krotnie różniczkowalna oraz $\forall k \in \overline{0,n-1}$: $\lim_{x\to a+} f^{(k)}(x) = 0 = \lim_{x\to b-} f^{(k)}(x)$, to $f^{(n)}$ ma co najmniej n pierwiastków w $]a,b[$. Korzystając z tego pokazać, że tzw. *wielomian Laguerra* $L_n(x) := e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$ ma dokładnie n dodatnich pierwiastków.

18. Obliczyć: (a) $f^{(10)}(0)$ dla $f(x) := x^2\cos 2x$; (b) $f^{(100)}(1)$ dla $f(x) := \frac{x^2-7x+12}{x^2-2x+2}$; (c) $f^{(10)}(3)$ dla $f(x) := \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$.

19. Obliczyć granice:
(a) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$;
(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x)$;
(d) $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x^4\log(1+x^{-2}))$;
(e) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1})$;
(f) $\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\log^2 x} - \frac{1}{x-1})$;
(g) $\lim_{x\to 0}(1+x^2e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;
(h) $\lim_{x\to 0} x^{-5}$
$(x - \sqrt{1+\frac{x^2}{3}}\sin x)$;
(i) $\lim_{x\to 0}(\frac{e^{ax}-ax}{e^{bx}-bx})^{x^{-2}}$; (j) $\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$; (k) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}$; (l) $\lim_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
(m) $\lim_{x\to 0}(1-x+\sin x)^{x^{-3}}$; (n) $\lim_{x\to\infty}(\cos(x+\frac{1}{x})-\cos(x-\frac{1}{x}))$; (o) $\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;
(p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(\cos x)-\sin x}{\cos^4 x}$; (q) $\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\cosh x})^{1/x^2}$; (r) $\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1+\cos x}$;
(s) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos 4x}-\sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$; (t) $\lim_{x\to 1-}(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2})^{1-x}$; (u) $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x)^{\frac{1}{\log x}}$.