

Seria 4
Ekstrema funkcji wielu zmiennych

Zad. 1. Który z trójkątów o obwodzie $2p$ ma największe pole P ? (Wsk. $P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$).

Zad. 2. Niech $h(x, y) = ay(e^x - 1) + x \sin x - \cos y$. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja h ma lokalne ekstremum w punkcie $(0, 0)$. Wsk. dla pewnego a badanie drugiej różniczki może nie wystarczyć, warto zainteresować się prostą przechodzącą przez $(0, 0)$ złożoną z takich punktów (u, v) , że:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0)u^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0)uv + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0)v^2 = 0.$$

Zad. 3. Znaleźć ekstrema funkcji

1. $f(x, y) = x^2 y(4 - x + y)$,
2. $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$,
3. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4a^2 xy + 2a^2$,
4. $f(x, y) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$,
5. $f(x, y, z) = 4 - x^2 - \frac{y}{x} - \frac{z^2}{y} - \frac{1}{z}$.

Zad. 4. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ i wyjaśnić w których z nich ma ona lokalne minima, maksima, a w których nie ma ona ekstremum lokalnego.

Zad. 5. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f(x, y) = x^4 - y^4 - 4xy^2 - 2x^2$, natępnie wskazać lokalne ekstrema. (Wsk. w otoczeniu tego z punktów krytycznych, którego charakteru nie da się wyjaśnić ogólnym twierdzeniem, rozważyć f na jednej z osi oraz na paraboli $x = -y^2$)

Zad. 6. Znaleźć największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x, y) = xy - x - y + 3$ na zbiorze E , jeśli E to domknięty trójkąt o wierzchołkach $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 4)$.

Zad. 7. Znajdź odległość prostej $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ od płaszczyzny $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4 \mid \begin{cases} x + y + z + w = 1 \\ x - y + z - w = 1 \end{cases} \right\}$

Zad. 8. Metodą najmniejszych kwadratów (błędów) dopasuj okrąg do następujących danych pomiarowych $(0, 8)$, $(2, 7)$, $(-5, -9)$, $(4, 5)$, $(-7, 4)$, $(7, 2)$ (oznaczmy je (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), tzn. znajdź minimum funkcji

$$f(a, b, c) = \sum_{i=1}^6 (x_i^2 + y_i^2 - 2ax_i - 2by_i - c)^2$$