ANALIZA I R
11 stycznia 2016

Praca Domowa IV

Zadanie 1. Zbadać zbieżność następujących całek:

$$(a)\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}} \qquad (b)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}},$$

$$(c)\ \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}, \qquad (d)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x\log^2 x},$$

$$(e)\ \int_0^1 \frac{dx}{x(-\log x)^2}, \qquad (f)\ \int_0^1 \frac{\sin(1/x)dx}{\sqrt{x}},$$

$$(g)\ \int_1^{+\infty} \frac{\cos x dx}{\log x}, \qquad (h)\ \int_1^\infty \frac{\cos(x^2)dx}{x^2+2x+5},$$

$$(i)\ \int_1^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tan} x\right) dx \qquad (j)\ \int_1^\infty \frac{\log^5 x dx}{x\sqrt{x}},$$

$$(k)\ \int_1^\infty \frac{x^{2001}}{\exp x} dx, \qquad (l)\ \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx,$$

$$(m)\ \int_0^\infty \sin(x^2)dx,, \qquad (n)\ \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)\log x}{x} dx,$$

$$(o)\ \int_0^\infty \frac{1+\sqrt{x+|\log x|}}{x} dx, \qquad (p)\ \int_0^\infty \frac{\text{arc tanx}}{x^2+\operatorname{arc\,tan} x} dx.$$

Zadanie 2. Załózmy, że f jest całkowalna na każdej $[a,u]$ dla ustalonego $a>0$ i $u \geq a$. Jeżeli

$$\lim_{x\to+\infty} x^p|f(x)| = c,$$

to

- Jeżeli $p>1$ i $c \geq 0$, to $\int_a^\infty |f(x)|dx$ jest zbieżna.
- Jeżeli $p \leq 1$ i $c \geq 0$, to $\int_a^\infty |f(x)|dx$ jest rozbieżna.

Zadanie 3. Zabadaj zbieżność i bezwzględnia zbieżność następujących szeregów:

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^k \frac{\sin^2 k}{k}, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos\frac{1}{n}\sqrt{n}}{n^p}, \qquad \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left[\frac{n+1}{\sqrt{n^2+100}} - 1\right],$$

$$\sum_{n=1}^\infty (-1)^n [1 - n\log[1+1/n]].$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$,

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$,

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$,

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ (10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-2)^n$,

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(10-p\sqrt[n]{5}\right)^n$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$ (14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1})^p$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}$ (16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$ (18) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$ (20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$

(21) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n}$ (22) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$

(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})$ (24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\log(1+\frac{1}{n})$

(25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n(n+1)}{n^2+1}$ (26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos\frac{1}{n}$

(27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt[n]{n^3+n}$ (28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$

(29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^2\pi}{n+1}$ (30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$

(31) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin na|}{n+1}$ (32) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin na$

ANALIZA I R
11 stycznia 2016

Zadanie 5. Zbadać punktową, niemal jednostajną i jednostajną zbieżność ciągów funkcyjnych:

(1) $f_n(x) := \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}, x \in \mathbb{R}$ (2) $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$,
(3) $f_n(x) := 1/(x+n), 0 < x < \infty$, (4) $f_n(x) := \frac{nx^3}{1+nx^2}, x \in \mathbb{R}$,
(5) $f_n(x) := \frac{1}{1+(x-n)^2}, x \in \mathbb{R}$, (6) $f_n(x) := nxe^{-n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 6. Zbadać zbieżność (punktową, niemal jednostajną i jednostajną) szeregu funkcyjnego:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2x}{n^7+x^2}, x \in \mathbb{R}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+nx^2}}{x+n^2}, x \in]0, +\infty[$,
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^5x^2}, x \in [0, \infty[$, (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, x \in [0, +\infty[$,

Zadanie 7. Wiadomo, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Dokonując stosownych podstawień i rozwijając funkcje podcałkową w szereg wykazać, że

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad (b) \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \int_0^{\infty} \log(1-e^{-x})dx = \frac{-\pi^2}{6}.$$

Zadanie 8. Zamieniając na szereg potęgowy obliczyć sumy szregów

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$; (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{2n+1}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$; (h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$; (i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15n^2-4n+1}{2^n}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$; (k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$; (l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+2)}$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+2)}$.