Zad 1 Rozwinąć w szereg Fouriera (trygonometryczny $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ i wykładniczy $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$) funkcje

(a) $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi]$

(b) $f(x) = x^2 \qquad x \in [\pi, \pi]$.

(c) $\Theta(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0] \\ 1 & x \in]0, \pi] \end{cases}$

Korzystając w punkcie (a) z twierdzenia Parsevala wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Korzystając z rozwinięcia (b) wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \& \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Zad 2. Rozwijając funkcję $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, 0) \\ x & x \in [0, \pi] \end{cases}$

w trygonometryczny szereg Fouriera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

wykazać, że $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ oraz

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$