Teoria dystrybucji c.d.

Na poprzednim wykładzie zdefiniowaliśmy: funkcje próbne $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, dystrybucje $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, pochodną T' dystrybucji T, dystrybucje regularne T_f gdzie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest lokalnie całk., iloczyn $h \cdot T$ dystrybucji T przez funkcję gładką $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pracujemy w dość bogatym formalizmie. Czy spełniony jest wzór Leibniza:

$$(h\cdot T)' \overset{(*)}{=} h'T + hT' \,?$$

Niech $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Wówczas

$$(h\cdot T)'(g) = -(h\cdot T)(g') = -T(hg')$$

oraz

$$(h'T + hT')(g) = T(h'g) + T'(hg) =$$

$$= T(h'g) - T((hg)') = T(h'g - h'g - hg')$$

$$= -T(hg') = (hT)'(g)$$

i zachodzi wzór Leibniza (*)

Ogólniej, czy dla dystrybucji $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ zachodzi $(T_1 T_2)' = T_1' T_2 + T_1 T_2'$?

Pytanie: czy można zdefiniować sensownie iloczyn $T_1 T_2$? NIE!

Przykład.

$$\left.\begin{aligned} &\delta \cdot \left(x \cdot P\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) = \delta \cdot 1 = \delta \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \neq \\ &\underbrace{(\delta \cdot x)}_{=0} \cdot P\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \cdot P\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \end{aligned}\right\}$$ I mamy problem!

Równania na dystrybucje.

Przykład:

Dystrybucja $P\left(\frac{1}{x}\right)(g) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{g(x)}{x}\,dx$

spełnia równanie

$$x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right)(g) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x \cdot g(x)}{x}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\,dx =: T_1(g)$$

$$x \cdot P\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{- oznaczenie } T_1.$$

Ogólniej T_f będziemy oznaczać f.

Zad Znaleźć wszystkie $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

takie, że $x \cdot T = 1$. (**)

Rozwiązanie szczególne: $T = P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Równanie (**) jest liniowe w T z niejednorodnością 1.

$$\underbrace{RORNJ}_{} = \underbrace{RORJ}_{T} + \underbrace{RSRNJ}_{= P\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$xT \overset{(***)}{=} 0$. ← przykładowe rozwiązanie:

$T = c \cdot \delta$ c - stała.

Czy to wszystkie rozwiązania?

Okazuje się, że są to wszystkie rozw:

(a) $g(x) = g(0) + x \cdot \tilde{g}(x)$

istniej f. próbna $\tilde{g}$ dająca tę równość

Jeśli $g(0)=0$ to

$$T(g) = T(x\tilde{g})$$

$$(x \cdot T)(\tilde{g}) \overset{(***)}{=} 0$$

(b) Niech h będzie f-cją próbną taką, że $h(0)=1$. Wówczas

$$T(g) = T(g - g(0)\cdot h + g(0)\cdot h) = T(g(0)h) = g(0)T(h)$$

znika w 0
bo $h(0)=1$

$= (c\cdot\delta)(g)$ gdzie $c = T(h)$.

(c) Zatem $xT = 1 \iff \exists$ skalar c : $T = c\cdot\delta + P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Przykład Znaleźć wszystkie dystrybucje $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ spełniające rów. $T'=0$.

Przykładowe rozwiązanie

Niech $f(x) = \text{const} = c$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wówczas $T_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} g\,dx$

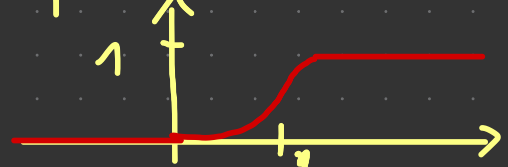
Zatem: $(T_f)' = -c\int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\,dx = -c\,\underset{\displaystyle 0}{\underset{\parallel}{g(+\infty)}} + c\,\underset{\displaystyle 0}{\underset{\parallel}{g(-\infty)}} = 0$

$T_f' = 0 = T_{f'}$.

Czy wszystkie rozw. $T' = 0$ są postaci cT_1?

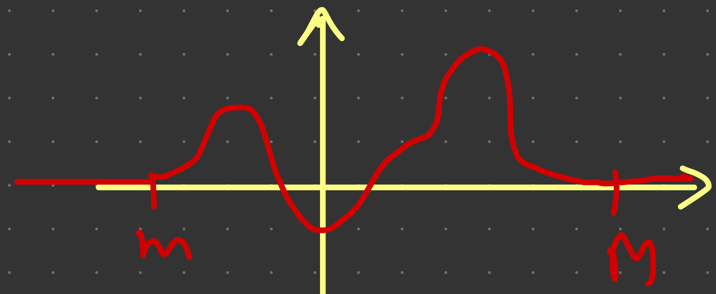
(a) Ustalmy pomocniczą funkcję gładką

$\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



(b) Dla funkcji próbnej $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ oznaczmy $I = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$ i rozważmy funkcję $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx$. Własności G:

jeśli $\mathrm{supp}(G) \subset [m, M]$



to dla $x < m$: $\int_{-\infty}^{x} g(x) = 0 = G(x)$

dla $x > M$ $\int_{-\infty}^{M} g(x) = I = G(x)$.

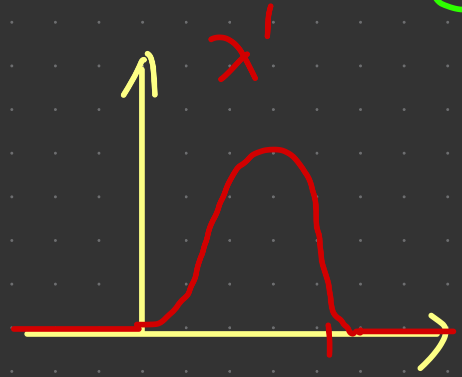
W szczególności funkcja

$\tilde{g}(x) = G(x) - I \cdot \lambda(x)$ – ma zwarty

oraz $\tilde{g}'(x) = G'(x) + I \cdot \lambda'(x) = g(x) + I \cdot \lambda'(x)$

próbna

próbne



(c) Aplikując T do $\tilde{g}'$ dostajemy

$$0 = T'(\tilde{g}) = -T(\tilde{g}') = -T(g) - T(I \cdot \lambda) \Rightarrow$$

$$T(g) = -I \cdot T(\lambda) = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot dx$$

gdzie $c = -T(\lambda)$, przypom: $I := \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx$

Wniosek $T' = 0 \iff T = \text{const}$!