Teoria dystrybucji & Trans. Fouriera

Przypomnienie

Prz funkcji typ Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$$

Wykazaliśmy, że

$\mathcal{F}(g)$ jest Schwartza jeśli g jest.

Zatem $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Pytanie

Czy każda funkcja

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jest $\mathcal{F}(g)$ dla pewnej $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ile jest rozw. r-nia

$$\mathcal{F}(g) \stackrel{?}{=} f \; ?$$

Innymi słowy: czy $\mathcal{F}$ jest transformacją odwracalną?

Stwierdzenie

$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jest odwracalna

oraz $\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{+2\pi i \xi x} f(\xi)\, d\xi$

Dowód: Rachunkowy

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{+2\pi i \xi x} \mathcal{F}(g)(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\xi \int_{\mathbb{R}} dy\, g(y)\, e^{-2\pi i \xi y} e^{2\pi i \xi x}$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} d\xi \, e^{-a^2 \xi^2} \int_{\mathbb{R}} dy \, g(y) \, e^{-2\pi i \xi (y-x)} =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} dy \, g(y) \int_{\mathbb{R}} d\xi \, e^{-a^2 \xi^2} e^{-2\pi i \xi (y-x)} =$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} dy \, g(y) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\frac{\pi^2}{a}(y-x)^2} =$$

$$\left\{ \frac{y-x}{\sqrt{a}} = \tilde{y} \Rightarrow y = \sqrt{a}\,\tilde{y} + x \right\}$$

$$= \lim_{a \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} d\tilde{y} \cdot \sqrt{a} \cdot g(\sqrt{a}\,\tilde{y} + x) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \, e^{-\pi^2 \tilde{y}^2}$$

$$= g(x)\sqrt{\pi}\int_{\mathbb{R}} d\tilde{y}\, e^{-\pi^2\tilde{y}^2} = \left\{ \tilde{\tilde{y}} = \pi\tilde{y} \right\}$$

$$= g(x)\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} d\tilde{\tilde{y}}\cdot e^{-\tilde{y}^2} = g(x)\frac{\sqrt{\pi}}{\pi}\cdot\sqrt{\pi} = g(x).$$

Podobnie pokazujemy, że

$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(f) = f$, co kończy dowód

Przypomnienie: tożsamość Parsevala

$h : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x) e^{-inx} dx \in \mathbb{C}$

wsp. szeregu Fouriera

Tożsamość Parsevala $\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(x)|^2$

Mając $\ell : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ definiujemy

$$\langle h | \ell \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{h(x)}\, \ell(x)\, dx$$

$$h(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx} \qquad c_n = \langle e^{inx} | h \rangle.$$

W p-ni Schwartza mamy iloczyn skalarny

$$\langle f | g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\, e^{2\pi i x \xi}\, d\xi$$

Twierdzenie (Tożsamość Plancherela)

$$\| f \| = \| \hat{f} \|$$

Czyli: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$

Równoważnie $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ jest operatorem unitarnym:

$$\| \mathcal{F} f \| = \| f \| \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Dowód Wystarczy pokazać, że

$$\langle f | \mathcal{F} g \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} f | g \rangle \iff \mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$$

Rzeczywiście.

$$\| \mathcal{F} f \|^2 = \langle \mathcal{F} f | \mathcal{F} f \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f | f \rangle$$

$$= \langle f | f \rangle = \| f \|^2 .$$

Niech więc $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Wtedy

$$\langle g | \mathcal{F} f \rangle = \int_{\mathbb{R}} \overline{g(\xi)} (\mathcal{F} f)(\xi) \, d\xi =$$

$$\int_{\mathbb{R}} d\xi \, \overline{g(\xi)} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \, d\xi \, \overline{g(\xi)} \cdot \overline{e^{2\pi i \xi x}} \cdot f(x) =$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx \, \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi \right)} \cdot f(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{F}^{-1} g)(x) \cdot f(x)\, dx = \langle \mathcal{F}^{-1} g \,|\, f \rangle .$$

$\blacksquare$

Operator położenia i pędu:

Operator $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni g(x) \overset{\hat{x}}{\longmapsto} x \cdot g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nazywamy operator położenia

Operator $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni g(x) \overset{\hat{p}}{\longmapsto} \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nazywamy operator pędu.

Relacja komutacyjna:

$$[\hat{x},\hat{p}]\,g(x) = x\cdot\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}g(x) - \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}(x\cdot g(x)) =$$

$$= x\frac{\hbar}{i}g'(x) - \frac{\hbar}{i}(g(x) + xg'(x)) = -\frac{\hbar}{i}\,g(x) = i\hbar g(x)$$

co zapisujemy jako:

$$[\hat{x},\hat{p}] = i\hbar .$$

Wektor $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ unormowany $1 = \|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2(x)\,dx$ można interpretować jako rozkład prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w punkcie x.

Średnia wartość położenia:

$$\langle \hat{x} \rangle_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \cdot x \, dx = \langle f | \hat{x} f \rangle$$

Średnia wartość pędu

$$\langle \hat{p} \rangle_f = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \, \hat{p} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)} \, \frac{\hbar}{i} f'(x).$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)}\ \frac{\hbar}{i}\ \widehat{f'}(\xi)\, d\xi =$$

$$\left\{ \widehat{f'}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) \right\} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} \cdot 2\pi \xi \cdot \hbar\ \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

$|\hat{f}(\xi)|^2$ – rozkład prawdopodobieństwa pędu $p = 2\pi \xi \cdot \hbar$.

Odchylenie standardowe
w stanie f:

$$\sigma_f^2(\hat{x}) = \langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle_f)^2 \rangle_f$$

$$\sigma_f^2(\hat{p}) = \langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle_f)^2 \rangle_f .$$

Cel: wykazać, że spełniona jest
zasada nieoznaczoności:

$$\sigma_f(\hat{x}) \cdot \sigma_f(\hat{p}) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Twierdzenie

Niech $A, B : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ będą operatorami liniowymi samosprzężonymi (np $A = \hat{x}$, $B = \hat{p}$) i niech $C = \frac{1}{i}[A, B]$ (np $C = \hbar$). Wówczas

$$\sigma_f(A) \cdot \sigma_f(B) \geqslant \frac{1}{2} \left| \langle C \rangle_f \right|$$

Dowód Bez straty ogólności:

$\langle A \rangle_f = \langle B \rangle_f = 0$. ← można op.

scentrować: $\tilde{A} = A - \langle A \rangle_f$, $\tilde{B} = B - \langle B \rangle_f$.

$$\tilde{C} = C.$$

$$\sigma_f^2(A) = \langle \tilde{A}^2 \rangle_f , \quad \sigma_f^2(B) = \langle \tilde{B} \rangle_f .$$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \; G_t = A + itB.$$

Zauważmy, że $G_t^* = \tilde{A} - it\tilde{B}$

$$\langle G_t^* G_t \rangle_f = \langle f | G_t^* G_t f \rangle = \langle G_t f | G_t f \rangle \geqslant 0.$$

Ale $\left.\begin{aligned} G_t^* G_t &= (\tilde{A} - it\tilde{B})(\tilde{A} + it\tilde{B}) = \\ &= \tilde{A}^2 + it[\tilde{A}, \tilde{B}] + t^2 B^2 . \end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$$0 \le \langle f \mid G_t^* G_t f \rangle = \langle \tilde{A}^2 \rangle_f + t \cdot \langle i[\tilde{A}, \tilde{B}] \rangle_f + t^2 \langle \tilde{B} \rangle_f$$

$$0 \le \sigma_f^2(A) - t \langle C \rangle_f + t^2 \sigma_f^2(B)$$

$$0 \le \Delta = \langle C \rangle_f^2 - 4\, \sigma_f^2(A)\, \sigma_f^2(B) \Rightarrow$$

$$\sigma_f(A)\, \sigma_f(B) \ge \frac{|\langle C \rangle_f|}{2} \qquad \blacksquare$$