6 października 2015 Analiza I Wykład I. wyk. 1.

Konstrukcja liczb rzeczywistych

notacje:

* l. naturalne $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
* l. całkowite $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
* l. wymierne $\mathbb{Q} = \{ \frac{k}{l} : k \in \mathbb{Z}, \ l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

Stwierdzenie 1.

Nie istnieje liczba wymierna $p \in \mathbb{Q}$, taka że $p^2 = 2$

Niech $k \in \mathbb{N}$. Jeśli k^2 jest liczbą nieparzystą, to również k jest liczbą nieparzystą.

Dowód (nie wprost)

Przypuśćmy, że k jest nieparzysta, wówczas istnieje $l \in \mathbb{N}$, taki że $k = 2l+1$, a wtedy $k^2 = (2l+1)^2 = 4l^2 + 4l = 1 =$
$= 2(2l^2 + 2l) + 1$.

czyli k jest nieparzysta.

Dowód stwierdzenia 1.

Przypuśćmy, że istnieją liczby $k \in \mathbb{Z}$ oraz $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ takie, że

$$\left(\frac{k}{l}\right)^2 = 2$$

bez straty ogólności k/l jest ułamkiem nieskracalnym, wtedy mamy równanie równoważne

$$k^2 = 2l^2,$$

zatem k^2 jest liczbą parzystą, a więc także k jest liczbą parzystą.

W takim razie istnieje $m \in \mathbb{Z}$, takie że $k = 2m$. ~~Podsumowując~~ Podstawiając to do równania mamy $4m^2 = 2l^2$

stąd $2m^2 = l^2$

Skoro l^2 jest parzyste, to l również jest parzyste.
Sprzeczność, bo k/l miało być ułamkiem nieskracalnym.

Stwierdzenie 2:

Rozważmy zbiór $A = \{ p \in \mathbb{Q} : p^2 < \mathbb{Q}$
Wówczas dla każdego $s \in A$ istnieje $t \in A$, takie że $s < t$

Niech $A = \{ p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2 \}$
Wówczas $\forall_{s \in A} \exists_{t \in A}$ takie że $s < t$

Notacje

Kwantyfikator ogólny $\forall$ = "dla każdego" „all"

Kwantyfikator ~~szczególny~~ szczegółowy $\exists$ = "istnieje" „exists"

Dowód stwierdzenia 2.

Dla $s \in A$ definiujemy $t = s + \frac{2 - s^2}{s+2} = s - \frac{s^2 - 2}{s+2} = \frac{2s + 2}{s+2}$.
Widać, że $t > s$. Ponadto $t^2 - 2 = 2\frac{s^2 - 2}{(s+2)^2} < 0$

jeżeli należy do A to będzie ujemne

$t^2 = 2\frac{s^2 - 2}{(s+2)^2} + 2$

Zatem $t^2 < 2$ $t \in A$

$t^2 = 2 +$ coś ujemnego
$t^2 = 2 -$ coś

ZBIORY UPORZĄDKOWANE

Definicja 1. Niech A, B będą zbiorami. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A, B nazywamy zbiór par uporządkowanych (a, b), gdzie $a \in A$, $b \in B$ i oznaczamy symbolem $A \times B$ ♦ koniec definicji

Przykład:

Relacja bycia liczbą mniejszą $<$ definiuje w zbiorze $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ pewien podzbiór $R \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, gdzie $R = \{(s,t) : s < t\}$

Definicja 2. **Relacją** w zbiorze X nazywamy dowolny podzbiór $R \subset X \times X$. Jeśli $(x,y) \in R$, to mówimy, że x jest w relacji R z y i piszemy $x R y$ lub $x \in R(y)$.

Definicja 3. Mówimy, że relacja R w zbiorze X jest **relacją porządku** jeśli:

(i) $\forall_{x,y \in X}$ zachodzi jedna i tylko jedna z możliwości: xRy, $x=y$, yRx

(ii) $\forall_{x,y \in X}$ jeśli xRy oraz yRz to xRz

Jeśli R jest relacją porządku w X to zazwyczaj oznaczamy je symbolem $<$, wówczas

1) piszemy $x<y$ lub $x=y$ lub $y<x$
2) piszemy $x<y$ i $y<z$ to $x<z$

Parę $(x,<)$ nazywamy **zbiorem uporządkowanym**.

Definicja 4. Definicja ograniczenia

Niech $(x,<)$ będzie zbiorem uporządkowanym oraz $Y \subset X$. Mówimy, że Y jest ograniczony z góry, jeśli $\exists_{x \in X}$, taki że $\forall_{y \in Y}$ $y<x$ lub $y=x$. Mówimy, że x **jest ograniczeniem górnym** zbioru Y. Podobnie definiujemy ograniczenie z dołu zbioru.

Definicja 5. Niech Y będzie podzbiorem ograniczonym w zbiorze uporządkowanym $(x,<)$. Przypuśćmy, że $\exists_{x \in X}$ będący ograniczeniem górnym Y, takim że jeśli $z<x$ to istnieje $y \in Y: z<y$. Wówczas mówimy, że x najmniejszym górnym ograniczeniem (supremum) zbioru Y i oznaczamy $x = \sup Y$.

Podobnie definiujemy infimum (jeśli istnieje)
największy kres dolny
i oznaczamy $\inf Y$.

Mówi się też ~~kres górny~~ i ~~kres dolny~~ na: supY, infY odpowiednio.

Definicja 6 Własność istnienia kresów

Mówimy, że zbiór posiada własność istnienia kresów, jeśli ~~jeśli~~ każdy ograniczony z góry $Y \subset X$ ma kres górny i każdy ograniczony z dołu $Y \subset X$ ma kres dolny.

Przykład:

$(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$ mają własność istnienia kresów, ale $(\mathbb{Q}, <)$ jej nie ma, zbiór ze stwierdzenia 2 nie ma kresu górnego.

7.10.2015 Wykład II. Analiza I

wyk. 2.

$A = \{ p \in \mathbb{Q} : p^2 < 2 \}$

$\forall_{s \in A} \quad \exists t \in A \qquad s < t$

$$t = s + \frac{2 - s^2}{s+2} > s$$

$$t^2 - 2 = \frac{s^2 - 2}{(s+2)^2} < 0$$

Liczby rzeczywiste tworzą ciało (,

Def. 7 (pełna definicja patrz wykład z Algebry)

Ciało jest to zbiór (oznaczamy symbolem $\mathbb{K}$) wyposażony w dwa działania $+$, $\cdot$ nazywane dodawaniem i mnożeniem. Operacje te spełniają tzw. aksjomaty ciała:

* dodawanie jest działaniem przemiennym, łącznym, ~~posiadale~~ dopuszcze element neutralny 0 i każdy element ma element przeciwny

* mnożenie - podobne własności, mamy $1 \in \mathbb{K}$, $\forall a \neq 0$ $\exists b \in \mathbb{K}$ $ab = 1$

Przykład $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 1, 0)$ $(\mathbb{Q}, <)$ jest zbiorem uporządkowanym.

Definicja 8. : **Ciałem uporządkowanym** nazywamy ciało, które jest jednocześnie zbiorem uporządkowanym $(\mathbb{K}, <)$ w taki sposób, że:

i) $\forall x, y, z \in \mathbb{K} \quad (x < z \Rightarrow x + y < z + y)$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{K} \quad x > 0, y > 0$ to $x \cdot y > 0$

Przykład $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ - jest ciałem uporządkowanym nie posiadającym własności istnienia kresów.

Twierdzenie 3:

Istnieje ciało uporządkowane $\mathbb{R}$ posiadające własność istnienia kresów i zawierające ciało liczb wymiernych R.

Uwaga powyższe warunki jednoznacznie wyznaczają $\mathbb{R}$.

Dowód (nieco szkicowy, pełny dowód → Rudin)

Krok I $\mathbb{R}$ jako zbiór

Def. 8) Przekrojem nazywamy każdy niepusty podzbiór $\alpha \subset Q$, $\alpha \neq Q$ o następujących własnościach:

$\underline{I}$ $\forall p \in \alpha$ $q < p$: mamy $q \in \alpha$

$\underline{II}$ $\forall p \in \alpha$ $\exists q \in \alpha$ takie że $q > p$

$\mathbb{R}$ jest z definicji zbiorem przekrojów.

Uwaga: ~~istnie~~ $\forall p \in Q$ zdefiniujmy zbiór $A_p \subset Q$ następująco

$A_p = \{s \in Q : s < p\}$; A_p jest przekrojem

Pokazuje to, że $\underline{\mathbb{R} \text{ zawiera } Q}$.

Krok II

W zbiorze przekrojów R wprowadzamy porządek $<$

Niech $\alpha, \beta \in R$. Mówimy że $\alpha < \beta$ jeśli $\alpha \subset \beta$, $\alpha \neq \beta$

zdefiniowaliśmy relację w zbiorze przekrojów $\mathbb{R}$.

Udowodnijmy, że jest to relacja porządku

Własność przechodniości:

Niech $\alpha, \beta, \gamma \in R$ takie że $\alpha < \beta$ i $\beta < \gamma$. Zatem $\alpha \subset \beta$, $\beta \subset \gamma$

Zatem $\alpha \subset \gamma$

Zachodzi jedna i tylko jedna z trzech możliwości:

$\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ lub $\beta < \alpha$

Załóżmy, że $\alpha \neq \beta$ oraz β nie $< \alpha$

$\beta \not\subset \alpha$ zatem istnieje $s \in Q$ takie że $s \in \beta$, ale $s \notin \alpha$

Udowodnimy, że wówczas $\alpha \subset \beta$. Weźmy $t \in \alpha$. $s \notin \alpha \Rightarrow t < s$

β jest przekrojem a więc $t \in \beta$. Czyli $\alpha \subset \beta$ i $\alpha < \beta$

Krok III $(R, <)$ ma własność istnienia kresów.

Niech $E \subset ~~R~~$ będzie ograniczonym z góry podzbiorem R.

Zdefiniujmy γ = suma mnogościowa przekrojów należących do E $= \bigcup_{\alpha \in E} \alpha$

Niech β będzie ograniczeniem górnym tzn. $\forall \alpha \in E$ mamy $\alpha < \beta$

Czy γ jest ~~przekrojem~~ kresem górnym E

a) γ jest przekrojem: γ nie jest zbiorem pustym, bo $\forall \alpha \in E$ $\alpha \neq \emptyset$

ponadto $\forall \alpha \in E$ mamy $\alpha \subset \beta$ a więc $\gamma = \bigcup \alpha \subset \beta \neq Q$

$\gamma \neq Q$

b) Niech $p \in \gamma$ oraz $q < p$

Istnieje $\alpha \in E$ takie że $p \in \alpha$, a więc $q \in \alpha$, stąd $q \in \gamma$

c) Niech $p \in \gamma$ $\exists \alpha \in E$ takie że $p \in \alpha$; $\exists r \in R$ $r > p$ i $r \in \alpha$

a wtedy $r \in \gamma$

Ponadto $\forall \alpha \in E$ mamy $\alpha < r$, czyli $\alpha < \gamma$ lub $\alpha = \gamma$

Zatem γ jest górnym ograniczeniem zbioru E.

Niech $\beta < \gamma$: $\beta \subset \gamma$ i $\beta \neq \gamma$. $\exists p \in \gamma$ takie że $p \notin \beta$.

$\exists \alpha \in E$ takie że $p \in \alpha$ i $p \notin \beta$.

Niech $s \in \beta$. Wtedy $s < p$. Bo gdyby było odwrotnie to

$p \leq s \Rightarrow p \in \beta$ bo β jest przekrojem.

Skoro α jest przekrojem to $s \in \alpha$

Zatem $\beta \subset \alpha$ i $\beta \neq \alpha$ czyli $\beta < \alpha$.

Wniosek γ jest kresem górnym zbioru E, a więc ~~E~~ R ma własności istnienia kresów.

Krok IV dodawanie w $\mathbb{R}$

Dla $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definiujemy $\gamma \subset R$ następująco:

$\gamma = \{s+t : s \in \alpha, t \in \beta\}$. Dalej $\gamma \overset{ozn.}{=} \alpha + \beta$

czy γ jest przekrojem? $\gamma \neq \emptyset$. - Oczywiste

$\gamma \neq Q$ gdyż $\exists p \in Q$ takie że $p \notin \alpha$ a wtedy $\forall s \in \alpha$ $s < p$

$s < p$. ~~A wtedy~~ Podobnie istnieje $p' \in Q$ $\forall p \in \beta$ $t < p'$

A wówczas $s+t < p+p'$ czyli $\gamma \neq Q$

Dalej: Przypuśćmy że $p < s+t \in \alpha+\beta$, $s \in \alpha$, $t \in \beta$

Wtedy $p-t < s$ a więc $p-t \in \alpha$ a wtedy $\overbrace{p-t+t}^{p} \in \alpha+\beta$

Niech $p = s+t \in \alpha+\beta$. $\exists s' \in \alpha : s < s'$ a wtedy $s+t < s'+t \in \alpha+\beta$

Wniosek $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$

Mamy działanie $+$ w $\mathbb{R}$ Zero tego działania to $A_0 = \{p \in Q : p < 0\}$

Element ~~odwrotny~~ przeciwny do α jest przekrojem

$\beta = \{p \in Q : \exists r \in Q,\ r > 0$ że $-p-r \notin \alpha\}$

Krok V : iloczyn

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $\alpha, \beta > 0$ to definiujemy $\alpha \cdot \beta = \{p \in Q : \exists s \in \alpha, t \in \beta :$
$p \leq s \cdot t\}$

⋮

W końcu sprawdza się, że $(\mathbb{R}, +, 0, 1, <)$ jest ciałem uporządkowanym, które posiada własności istnienia kresów i zawiera Q.

Zasada indukcji matematycznej:

Niech $T \subset \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że

(1) $1 \in T$

(2) jeśli $n \in T$ to $n+1 \in T$

wówczas $T = \mathbb{N}$

13.10.2015 Wykład Analiza I

wyk. 3.

Twierdzenie (własność) 4. (**własność Archimedesa**)

Niech $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ wówczas $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t. że $nx > y$

Dowód

Niech $E = \{nx : n \in \mathbb{N}\}$ jeśli ~~wartość~~ $\forall_n\; nx \leq y$ to E jest ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}$. Niech $\alpha = \sup E$

Ponieważ $x > 0$ to $\alpha - x < \alpha$ a więc $\alpha - x$ nie jest kresem górnym i $\exists\, n$ t. że $\underbrace{\alpha - x < nx}_{\text{niefajnie wcześniej}}$. Zatem $\alpha < (n+1)x \in E$, sprzeczność.

Twierdzenie 5.

"istnieje dokładnie jedna"

Niech $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Wówczas $\exists!\; y \in \mathbb{R}$, $y > 0$ t. że $y^n = x$.

Uwaga dalej y oznaczamy $x^{\frac{1}{n}}$

Dowód

Skorzystamy dalej z nierówności $0 < a < b$ to $b^n - a^n < (b-a)nb^{n-1}$

dowód nierówności: $b^n - a^n = (b-a)(b^{n-1} + b^{n-2}a + b^{n-3} \cdot a^2 + \ldots + a^{n-1})$

$$< (b-a)\underbrace{(b^{n-1} + b^{n-1} + \ldots + b^{n-1})}_{n \text{ składników}}$$

Rozważmy zbiór $E = \{t \in \mathbb{R} : t > 0 \text{ oraz } t^n < x\}$

ⓐ E jest zbiorem niepustym.

Weźmy $0 < t < \frac{x}{1+x}$ ~~za~~ w szczególności $0 < t < 1$

a zatem $t^n < t < \frac{x}{x+1} < x$ a więc t jest elementem zbioru E.

ⓑ E jest zbiorem ograniczonym z góry

Niech $t > (1+x) > 1$. Wtedy $t^n > t \geq 1 + x > x$ a więc t nie jest elementem zbioru E.

a więc $1+x$ jest górnym ograniczeniem zbioru E.

Niech $y = \sup E$. Dalej dowodzimy, że $y^n = x$.

Przypuśćmy, że $y^n < x$. Niech $h > 0$ (doprecyzujemy).

$$(y+h)^n - y^n < h \cdot n(y+h)^{n-1} \overset{h<1}{<} h \cdot n \cdot (y+1)^{n-1} \overset{h < \frac{x-y^n}{n \cdot (y+1)^{n-1}}}{<}$$

$$< (x-y^n)\frac{\cancel{(y+1)^{n-1}}\, n}{\cancel{(y+1)^{n-1}}\, n} = x - y^n$$

a więc $(y+h)^n < x$ wbrew definicji $y = \sup E$ bo $y+h \in E$ oraz $y < y+h$ – sprzeczność

Podobnie pokazujemy, że $y^n > x$ prowadzi do sprzeczności.

Czyli $y^n = x$, – i mamy istnienie y

$\boxed{\text{Jednoznaczność}}$: jeśli $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ $y_1, y_2 > 0$ t. że $y_1^n = y_2^n = x$
Wówczas np. $y_1 < y_2$ a wtedy $y_1^n < y_2^n$ sprzeczność

Def (RELACJE RÓWNOWAŻNOŚCI)

Niech R będzie relacją w zbiorze X, tzn $R \subset X \times X$, $R \neq \emptyset$
Mówimy, że <u>R jest relacją równoważności</u> jeśli

(1) $\forall_{x \in X}$ $(x,x) \in R$ (xRx) (zwrotność)

(2) $\forall_{x,y \in X}$ jeżeli xRy to yRx (symetria R).

(3) $\forall_{x,y,z \in X}$ jeżeli xRy oraz yRz oraz xRz (przechodniość R)

Przykład:

Weźmy $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$R \subset X \times X = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiujemy następująco

$(m,n) R (k,l)$ jeśli $m+l = k+n$ ~~(...)~~

Sprawdzić, że R jest relacją równoważności

Definicja Przypuśćmy, że $R \subset X \times X$ jest relacją równoważności oraz $x \in X$. $\boxed{\text{Klasą abstrakcji}}$ $x \in X$ ze względu na R nazywamy podzbiór tym $\{$ ~~$y \in R$~~ $y \in X : y R x\}$ i oznaczamy $[x]_R$

Stwierdzenie:

Niech $R \subset X \times X$ będzie relacją równoważności $x_1, x_2 \in X$
Wówczas $[x_1]_R = [x_2]_R$ lub $[x_1]_R \cap [x_2]_R = \emptyset$

Dowód

Przypuśćmy, że $[x_1]_R \cap [x_2]_R \neq \emptyset$. Niech $y \in [x_1]_R \cap [x_2]_R$.
Niech $x \in [x_1]_R$. Wówczas po pierwsze $x R x_1$, $y R x_1$, $y R x_2$
Korzystając z przechodniości i symetrii R mamy:
$x R x_1 R y R x_2$ a zatem $x R x_2$ czyli $x \in [x_2]_R$ i $[x_1]_R \subset [x_2]_R$
Podobnie $[x_2]_R \subset [x_1]_R$ a więc mamy równość.

$$[x_1]_R = [x_2]_R \quad \blacksquare$$

Wracając do przykładu.
Zbiór liczb całkowitych definiujemy jako zbiór klas abstrakcji relacji R w zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$-5 \stackrel{\text{def}}{=} [(5,10)]_R$

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} [(m,n)]_R \quad \text{Zauważmy, że } \underbrace{[(5,10)]_R}^{5-10=-5} = \overbrace{[(1,6)]_R}^{1-6=-5}$$

gdyż $(5,10) R (1,6)$: $5+6 = 10+1$

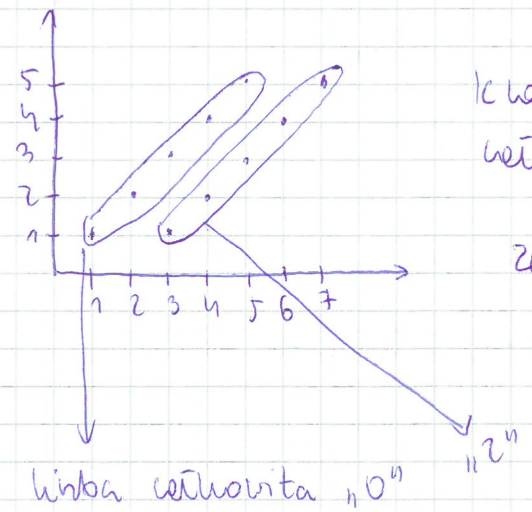
Dalej w $\mathbb{Z}$ wprowadza się działania:

Dodawanie definiujemy następująco:

$$[(m,n)]_R + [(k,l)]_R \overset{def}{=} [(m+k, n+l)]_R$$

Mnożenie:

$$[(m,n)]_R \cdot [(k,l)]_R \overset{(m-n)(k-l)}{=} [(m\cdot k + n\cdot l, m\cdot l + n k)]_R$$



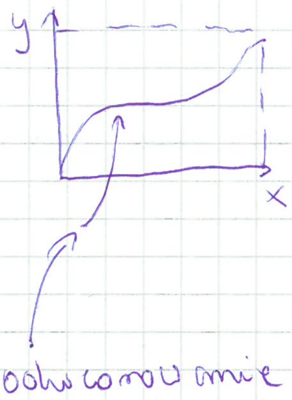
Klasa abstrakcji reprezentuje liczbę całkowitą $\mathbb{Z}$

zero → diagonalne elem. tego zbioru

Definicja $\boxed{\text{Relacją } \text{~~między~~ ze } \text{~~zbiorami~~ zbioru } X \text{ ~~oraz~~ do } Y}$ nazywamy podzbiór $\emptyset \neq R \subset X \times Y$. Notacja jest podobna xRy itd.

Mówimy, że $R \subset X \times Y$ jest **odwzorowaniem X do Y** jeśli $\forall x \in X \ \exists! y \in Y$ t. że xRy, wówczas R oznaczamy symbolem $F: X \longrightarrow Y$. i piszemy $y = F(x)$. zamiast xRy.

Przykład:



to nie jest:

Definicja

Niech $F: X \longrightarrow Y$. Mówimy, że F jest:

(a) różnowartościowe (injektywne) jeśli $F(x_1) \neq F(x_2)$ gdy $x_1 \neq x_2$

(b) na (surjektywne) $\forall_{y \in Y} \exists_{x \in X}$ t. że $y = F(x)$

(c) 1-1 (bijektywne) $\forall_{y \in Y} \exists!_{x \in X}$ t. że $y = F(x)$

Mówimy, że zbiory X, Y **równoliczne** jeżeli istnieje bijekcja $F: X \longrightarrow Y$

$\boxed{\text{15. 10. 2015 Wykład Analiza I}}$ wyk. 4.

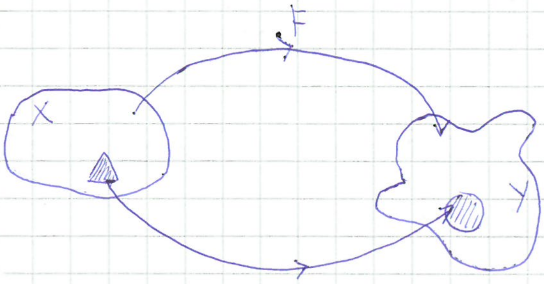
Definicja 13.

Niech $F: X \to Y$. Wówczas (a) X nazywamy $\boxed{\text{dziedziną}}$ F,
Y nazywamy $\boxed{\text{przeciwdziedziną}}$

(b) niech $U \subset X$. Zbiór $\{F(x): x \in U\}$ nazywamy obrazem zbioru U przy odwzorowaniu F.

(c) Niech $V \subset Y$. Zbiór $\{x: F(x) \in V\}$ $\boxed{\text{przeciwobrazem}}$ przy odwzorowaniu F i oznaczamy $F^{-1}(V)$

(d) $\boxed{\text{Obrazem}}$ odwzorowania F nazywamy zbiór $F(X)$



$\bigcirc = F(\triangle)$

$\nabla \subset F^{-1}(F(\nabla))$

Równości zazwyczaj nie będzie

Definicja 14.

$\forall_{n \in \mathbb{N}}$ oznaczmy $J_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ oraz $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

(a) Mówimy, że A jest zbiorem skończonym jeśli $\exists\, n \in \mathbb{N}$ t. że A jest równoliczny z J_n: $A \sim J_n$

(b) Mówimy, że A jest zbiorem przeliczalnym jeśli $A \sim \mathbb{N}$.

$A \sim B$ oznacze A, B są równoliczne

(c) Mówimy, że A jest co najwyżej przeliczalny jeśli jest skończony bądź przeliczalny

(d) Mówimy, że A jest nieskończony jeśli nie jest skończony

(e) Mówimy, że A jest nieprzeliczalny jeśli nie jest skończony ani nie jest przeliczalny

Definicja 15.

Funkcja $f: \mathbb{N} \longrightarrow X$ nazywamy ciągiem o wyrazach w X.
Jeśli $f(n) = x_n \in X$ to f oznacza się symbolem $f(x_n)$
~~Mówimy~~ Jeśli X jest zbiorem przeliczalnym to mówimy, że X daje się ustawić w ciąg $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Fakt 1 Niech X będzie zbiorem przeliczalnym oraz $Y \subset X$ będzie zbiorem nieskończonym. Wówczas Y jest zbiorem przeliczalnym.

Fakt 2 Niech $E_1, E_2, E_3, \dots$ będzie rodziną zbiorów przeliczalnych. Wówczas suma mnogościowa E_n $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód:

Ustawmy elementy zbioru E_n w ciąg. $E_n = \{x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \dots\}$
Rozważmy tabliczkę elementów:

$$\begin{array}{ccccc}
x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & \dots \\
x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{34} & \dots \\
x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & \dots \\
x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & &
\end{array} \qquad (T)$$

Ponumerujmy elementy (T) zgodnie z $\nearrow$ co definiuje
$f: \mathbb{N} \longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$
surjekcja
zatem zbiór $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ - co najwyżej przeliczalne.
Ponieważ E_1 jest zbiorem nieskończonym to $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ jest nieskończony a zatem przeliczalne.

Stwierdzenie 7.

Niech X, Y będą zbiorami przeliczalnymi. Wówczas $X \times Y$ jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód: Ustawmy Y w ciąg $Y = \{y_1, y_2, y_3 \dots\}$

Wówczas $X \times Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \times \{y_n\}$. Kładąc $E_n = X \times \{y_n\}$

i korzystając z Faktu (2) $\Rightarrow$ $X \times Y$ – przeliczalny.

$\longrightarrow$ odwzorowanie

$\longmapsto$ coś przechodzi na element

Wniosek:

Zbiór $\mathbb{Q}$ jest przeliczalny.

Dowód: Rozważmy $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \ni (a,b) \longmapsto \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Ponieważ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ jest zbiorem przeliczalnym to $\mathbb{Q}$ jest co najwyżej przeliczalny. $\mathbb{Q}$ nie jest skończonym zbiorem a zatem jest przeliczalny

Twierdzenie

Niech $2^{\mathbb{N}}$ oznacza zbiór ciągów o wyrazach w zbiorze $\{0,1\}$. Wówczas $2^{\mathbb{N}}$ nie jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód (argument przekątniowy Cantora) nie wprost.

Przypuśćmy, że $2^{\mathbb{N}}$ jest przeliczalny

0 0 0 0 0 ... – ciąg #1

0 1 0 1 1 0 0 0 ... – ciąg #2

(c) 1 0 1 0 1 1 1 0 ... – ciąg #3

0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 ... – ciąg #4

itd. itd.

Zdefiniujmy $y \in 2^{\mathbb{N}}$ $y = (1, 0, 0, 0, 1$ itd.$)$

$$y_k = \begin{cases} 0 & \text{jeśli ciąg } \#k \text{ ma w rejestrze } k \ 1 \\ 1 & \text{—||— —||— —||— } 0 \end{cases}$$

y nie pojawia się w (C).

Bajeczka 1. Mając ciąg $x \in 2^{\mathbb{N}}$ "definiujemy" $x = (x_n)$ liczbę rzeczywistą jako $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot x_n \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ ← nieprzeliczalny

Twierdzenie 8.
Niech X będzie zbiorem. Oznaczamy 2^X zbiór podzbiorów X.
Wówczas istnieje injekcja z X do 2^X ale X i 2^X nie są równoliczne. "2^X jest istotnie większy od X"

Dowód:
Istnienie injekcji z $X \to 2^X$: $X \ni x \longmapsto \{x\} \in 2^X$
Niech $\varphi: X \to 2^X$ będzie jakąś injekcją.

Funkcja charakterystyczna ~~$Y \in X$~~; χ_Y dla $Y \in 2^X$;
gdzie $\chi_Y : X \to \{0,1\}$ $\chi_Y(x) = \begin{cases} 1 & x \in Y \\ 0 & x \notin Y \end{cases}$
Rozważmy funkcję $\chi: X \to \{0,1\}$
daną wzorem
$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \chi_{\varphi(x)}(x) = 0 \\ 0 & \text{jeśli } \chi_{\varphi(x)}(x) = 1 \end{cases}$$

Zatem $\forall_{x \in X}\ \chi \neq \chi_{\varphi(x)}$

Wniosek Niech $Z \subset X$ będzie dany ~~wzorem~~ zdaniem $Z = \{x \in X : \chi(x) = 1\}$
Wówczas $\chi = \chi_Z$ oraz $\forall_{x \in X}\ \chi_Z \neq \chi_{\varphi(x)}$. Więc $\forall_{x \in X}\ Z \neq \varphi(x)$
φ nie jest surjekcją ▨

20.10.2015 Wykład Analiza I — wyk. 5.

Definicja 16.
Niech $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Mówimy, że (x_n) jest $\boxed{\text{zbieżny}}$ jeśli istnieje $g \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{N\in\mathbb{N}} \quad \forall_{n\geq N} \quad |x_n - g| < \varepsilon \qquad (*)$$

($N(\varepsilon)$ zależy od epsilona)

Stwierdzenie: Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym. Przypuśćmy, że $g, g' \in \mathbb{R}$ spełniają warunek $(*)$. Wówczas $g = g'$.

Dowód:
Niech $\varepsilon > 0$. $\exists N \ \forall_{n\geq N} \ |x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$
Podobnie $\exists N' \ \forall_{n > N'} \ |x_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2}$

Zatem kładąc $N'' = \max\{N, N'\}$ mamy dla $n > N''$

$$|g - g'| = |(g - x_n) + (x_n - g')| \underset{3}{\leq} |g - x_n| + |x_n - g'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Czyli $g = g'$ ∎

Definicja 17. Niech (x_n) będzie ciągiem zbieżnym. Liczbę $g \in \mathbb{R}$ spełniającą $(*)$ nazywamy **granicą ciągu** (x_n) i oznaczamy $g = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Uwaga: Rozważmy funkcję $d: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ($\overset{\text{ozn.}}{=} \{x \in \mathbb{R} \ x \geq 0\}$) daną wzorem $d(x, x') = |x - x'|$.
Wówczas funkcja d ma następujące własności:

1. $d(x, x') = 0 \iff x = x'$
2. $d(x, x') = d(x', x)$;
3. $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ $\boxed{\text{Nierówność trójkąta}}$

~~Stwierdzenie~~

Uwaga: Nierówność $|x_n - g|$ będziemy zastępować równoważnym sformułowaniem tzn.: $x_n \in]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$

Stwierdzenie: Jeśli (x_n) jest ciągiem zbieżnym to $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest ograniczony.

Dowód: Kładąc $\varepsilon = 1$. Znajdujemy N takie że $\forall_{n>N}\ x_n \in]g-1, g+1[$

Ograniczeniem dolnym A jest $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n, g-1\}$

Podobnie ograniczeniem górnym $\max\{x_1, x_2, \dots x_n, g+1\}$ ∎

Stwierdzenie

Niech $(x_n), (y_n)$ będą ciągami zbieżnymi do x, y odpowiednio.

Wtedy:

(1) $(x_n + y_n)$ jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$

(2) ~~z~~ $(x_n y_n)$ jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$

(3) Jeśli $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ x_n \neq 0$ to ciąg $\frac{1}{x_n}$ jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$

$\hookrightarrow n\ \ x \neq 0$

Dowód:

(1) $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists N$ t. że $\forall_{n>N}\ |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

$-11- \quad \exists N' \quad \forall_{n>N'}\ |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\Big\} \Rightarrow$ dla $n > \max\{N, N'\}$

dla $n > \max\{N, N'\}$ mamy $|x_n + y_n - (x+y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

(2) Niech $M \in \mathbb{R}$ t. że $\forall_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < M$.

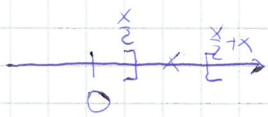
$$M' \in \mathbb{R} : \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad |y_n| < M'$$

$$|x_n \cdot y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + xy_n - x \cdot y|$$
$$\leq |(x_n - x)y_n| + |x(y_n - y)|$$
$$\leq |x_n - x|M' + |x||y_n - y|$$

kładąc $N, N' \in \mathbb{N}$ t. że $n > N$ mamy $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M}$ oraz dla $n > N'$ $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2|x|}$ dostajemy dla ~~m~~ $n > \max\{N, N'\}$

$$|x_n \cdot y_n - xy| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2|x|} \cdot |x| = \varepsilon$$

(3). Z założenia $x \neq 0$ wynika, że istnieje $N : \forall_{n > N}$ $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$



dla $x > 0$ kładąc $\varepsilon = \frac{x}{2}$

dla $x < 0$ kładąc $\varepsilon = \frac{|x|}{2}$

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \frac{|x_n - x|}{|x_n||x|} \leq \frac{|x_n - x|}{\frac{x^2}{2}}$$

Weźmy N' t. że $\forall_{n > N'} \; |x_n - x| < \frac{x^2}{2} \cdot \varepsilon$

a wtedy dla $n > \max\{N, N'\}$ mamy $\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| < \varepsilon$.

TWIERDZENIE (O TRZECH CIĄGACH)

Niech (x_n), (z_n) będą zbieżne oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = g$.

Przypuśćmy, że ciąg (y_n) spełnia $x_n \leq y_n \leq z_n$ dla wszystkich $n \in N$. Wówczas (y_n) jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = g$.

Dowód:

$N: \forall_{n>N} \quad x_n \in]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$

$N': \forall_{n>N} \quad \cancel{x_n}\ z_n \in]g-\varepsilon, g+\varepsilon[$

Dla $n > \max\{N, N'\}$ mamy $y_n - g \leq z_n - g \leq |z_n - g| < \varepsilon$

$g - y_n \leq g - x_n \leq |g - x_n| < \varepsilon$.

a więc $|y_n - g| < \varepsilon$ ■

Twierdzenie

Niech (x_n) będzie ciągiem ograniczonym z góry i rosnącym ($x_{n+1} \geq x_n$). Wówczas (x_n) jest zbieżny oraz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Dowód: Oznaczmy $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = x$.

Weźmy $\varepsilon > 0$. Skoro $x - \varepsilon < x$ to $\exists N$ t. że $x_N > x - \varepsilon$

a więc $\forall_{n>N} \; x - x_n \leq x - x_N < \varepsilon$

Czyli $|x - x_n| < \varepsilon$.

Stwierdzenie:

(1) ~~lim~~ $p>0$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

(2) $p>1$ to $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

(4) $p>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$

(5) $x \in \mathbb{R}$ $|x|<1$ to $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

Dowód:

(1). $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $N > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}$. biorąc $n>N$ mamy $\frac{1}{n^{\frac{1}{p}p}} < \varepsilon$. Czyli $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

$x > -1$ to $(1+x)^n \geq 1+nx$

(2). Weźmy $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Wówczas $x_n > 0$
z nier. Bernoulliego mamy
$p = (1+x_n)^n \geq 1 + n \cdot x_n$ a zatem $0 \leq x_n \leq \frac{p-1}{n}$

Z twierdzenia o 3 ciągach $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ a więc
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

(3). Połóżmy $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$.
Wówczas
$n = (1+x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \dots \binom{n}{n}x_n^n$

$\geqslant \cancel{1+} \binom{n}{2} x_n^2 = \cancel{1+} \frac{n\cdot(n-1)}{2} \cdot x_n^2$

$0 \leqslant x_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ czyli $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(4). Weźmy $k > \alpha$, $k > 0$. Dla $n > 2k$ mamy

$(1+p)^n \geqslant \binom{n}{k}\cdot p^k = \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot p^k \geqslant \cancel{\left(\frac{n}{2}\right)^k} \frac{n^k \cdot p^k}{k!\,2^k}$

a wtedy $0 < \frac{n^\alpha}{(1+p)} \leqslant \frac{2^k k!}{p^k}\cdot n^{\alpha-k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(5). Wynika z (4) dla $\alpha = 0$ $|x| = \frac{1}{1+p}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$

jeśli $|x| < 1$.

Wykład Analiza I 21. 10. 2015 wyk. 6.

Definicja 18. Niech (x_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Mówimy, że (x_n) jest **ciągiem Cauchy'ego** jeśli

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{N\in\mathbb{N}} \ \forall_{n,m>N} \ |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Twierdzenie: Niech (x_n) będzie ciągiem l. rzeczywistych. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) (x_n) jest ciągiem zbieżnym

(2) (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego

Dowód

(1) $\Rightarrow$ (2) Niech $g = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ i $\varepsilon>0$. Niech N: $\forall_{n>N} \ |x_n - g| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wówczas $\forall_{n,m>N}$ mamy

$$|x_n - x_m| = |x_n - g + g - x_m| \leq |x_n - g| + |g - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Zauważmy, że (x_n) jest ciągiem ograniczonym.

Kładąc $\varepsilon = 1$ $\exists N$ t.że $\forall_{n>N} \ |x_n - x_{N+1}| < 1$.

Więc $x_n \in \,]x_{N+1} - 1, x_{N+1} + 1[$.

Ograniczeniem górnym jest $\alpha \overset{def}{=} \max\{x_1, .., x_N, x_{N+1} + 1\}$

Ograniczeniem dolnym jest $\beta \overset{def}{=} \min\{x_{N-1}, x_N, \dots, x_1\}$

Zdefiniujmy ciągi (y_n), (z_n) następująco

$$y_n = \overset{\inf}{\cancel{\sup}}\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \qquad z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Zauważmy, że mamy nierówność

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

Dalej ciąg z_n jest $\boxed{\text{malejący:}}$ ~~ograniczony z góry~~ $\forall_n\, z_n \le \alpha$

bo $z_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} \ge \sup\{x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = z_{n+1}$

i ograniczony z dołu $z_n \ge \beta \Rightarrow$ więc (z_n) zbieżny: $g = \lim_{n\to\infty} z_n$

Podobnie (y_n) jest rosnący i ograniczony z góry przez α.

W szczególności (y_n) jest zbieżny ~~a więc~~ $g' = \lim_{n\to\infty} y_n$

Wykażemy, że $g = g'$:

Weźmy $\varepsilon > 0$ $\exists N$ takie że $|x_n - x_m| < \varepsilon$ dla $n, m > N$

Stąd $\sup\{x_n, x_{n+1}, \dots\} - \inf\{x_n, x_{n+1}, \dots\} \le \varepsilon$

a to oznacza, że dla $n > N$ mamy $y_n \le z_n \le y_n + \varepsilon$

Przechodząc z n do ∞ mamy $g' \le g \le g' + \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$

Zatem $g' = g$.

Korzystając z tw. o 3 ciągach dla $y_n \le x_n \le z_n$ dostajemy zbieżność (x_n) oraz $g = \lim_{n\to\infty} x_n$.

$$\underbrace{\begin{matrix} y_n & & z_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & & g \end{matrix}}_{\substack{\Downarrow\, n\to\infty \\ g}}$$

$\boxed{\text{TWIERDZENIE}}$ STOLZA: ~~Niech~~

Def. 19: Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych (x_n) zbiega do $+\infty$ jeśli $\forall_{M\in\mathbb{N}}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n>N}\ x_n > M$: $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$

Twierdzenie Stolza: Niech (x_n), (y_n) będą ciągami liczb rzeczywistych, y_n będzie ciągiem ściśle rosnącym od pewnego miejsca zbiegającym do $+\infty$.

Wówczas:

(1) Jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = g \Rightarrow$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = g$.

(2) Jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty \Rightarrow$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

Dowód później.

$\boxed{\text{LICZBA} \quad e \simeq 2{,}718281828459\,0\ldots}$

Przykład: ~~Rozważ~~ Niech $x \in \mathbb{R}$. Rozważmy ciąg $e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

Dla dużych n rozważmy $\frac{e_{n+1}(x)}{e_n(x)} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} =$

$$= \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) = \left(\frac{1+\frac{x}{n}-\frac{x}{n}+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^{n+1}\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{\substack{\text{z nier.}\\ \text{Bernoulliego}}}{\geqslant} \left(1-\frac{\cancel{x}\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1$$

jeśli tylko $\frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}} \geqslant -1$ (dla dostatecznie dużych n)

Więc ciąg $e_n(x)$ jest rosnący (od pewnego miejsca).

Ponadto $e_n(x)$ jest ograniczony:

$$e_n(x)\cdot e_n(-x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n \leq 1$$

To pokazuje, że $e_n(x) \leqslant \frac{1}{e_n(-x)}$ skoro ciąg $e_n(-x)$ jest rosnący to $\frac{1}{e_n(-x)}$ jest malejący (od pewnego miejsca).

a więc $e_n(x)$ jest ograniczony z góry czyli zbieżny.

Definiujemy $\exp(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$$e \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Uwaga: Udowodnimy dalej, że $e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)$

Twierdzenie: liczba e nie jest liczbą wymierną.

Dowód: Notacja $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. Przypuśćmy, że $\exists p,q\in\mathbb{N}$ t. że $e=\frac{p}{q}$. Wówczas

$$e - S_q = \frac{1}{(q+1)!}+\frac{1}{(q+2)!}+\frac{1}{(q+3)!}+\ldots = \frac{1}{(q+1)!}\left(1+\frac{1}{(q+2)}+\frac{1}{(q+2)(q+3)}+\ldots\right)$$

$$< \frac{1}{(q+1)!}\underbrace{\left(1+\frac{1}{q+1}+\frac{1}{(q+1)(q+1)}+\ldots\right)}_{\text{szereg geomet.}} = \frac{1}{(q+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} =$$

$$= \frac{1}{q!\,q}$$

Mamy: $e=\frac{p}{q} \Rightarrow q!\,e\in\mathbb{N}$

Ponadto $q!\,S_q = q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\in\mathbb{N}$

Zatem $q!(e-S_q)\in\mathbb{N}$ oraz $0<q!(e-S_q)\leq\frac{1}{q}\leq 1$

Wykład Analiza I, 27.10.2015

wyk. 7.

Przypomnienie:

y_n - rosnący od pewnego miejsca, $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$

Jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = g$, gdzie $g \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ to $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = g$

$\boxed{\text{Dowód}}$:

1) Załóżmy, że $g \in \mathbb{R}$

liczby $\mathbb{R}$ ściśle dodatnie

Pomocniczy fakt: niech $\underbrace{(u_1, \dots, u_n)}_{\in \mathbb{R}}$, $(v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Przypuśćmy, że $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy $a \leq \frac{u_i}{v_i} \leq b$.

Wówczas $a \leq \frac{u_1 + \dots + u_n}{v_1 + \dots + v_n} \leq b$

Dowód pomocniczego faktu: $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ mamy

$\exists a, b \in \mathbb{R}$

$v_i a \leq u_i \leq v_i b$ $(*)$

Sumując $(*)$ po i: $(v_1 + \dots + v_n) a \leq (u_1 + \dots + u_n) \leq (v_1 + \dots + v_n) b$.

Dzielimy przez $v_1 + \dots + v_n$ i już!

Niech $N \in \mathbb{N}$ t. że $y_{n+1} - y_n > 0$, $y_n > 0$ oraz $\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \in [g - \frac{\varepsilon}{2}, g + \frac{\varepsilon}{2}]$

dla wszystkich $n > N$.

Weźmy: $u_i = x_{i+1} - x_i$, $v_i = y_{i+1} - y_i$, $i = N+1, N+2, \dots, n$

$$g - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{u_i} + x_n - x_{n-1} + \dots + x_{N+1} - x_N}{\underbrace{y_{n+1} - y_n}_{v_i} + y_n - y_{n-1} + \dots + y_{N+1} - y_N} \leq g + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ a więc}$$

$$g - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{x_{n+1} - x_N}{y_{n+1} - y_N} \leq g + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - g = \frac{x_{n+1} - g y_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - g y_{n+1}}{y_{n+1} - y_N} \cdot \frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}} =$$

$$= \cancel{\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - g = \frac{x_{n+1} - g y_{n+1}}{y_{n+1}}} = \frac{x_{n+1} - x_N + (x_N - g y_{n+1})}{y_{n+1} - y_N} \cdot \frac{y_{n+1} - y_n}{y_{n+1}} =$$

$$= \frac{(x_{n+1} - x_N + (x_N - g(y_{n+1} - y_N + y_N)))}{y_{n+1} - y_n} \cdot \frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}} =$$

$$= \left[\left(\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_N}\right) - g + \frac{x_N - g y_N}{y_{n+1} - y_N}\right] \cdot \frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}}$$

$$\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - g\right| \leqslant \underbrace{\left|\frac{x_{n+1} - x_N}{y_{n+1} - y_N} - g\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\left|\frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}}\right|}_{\leq 1} + \underbrace{\left|\frac{x_N - g y_N}{y_{n+1} - y_N}\right|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \underbrace{\left|\frac{y_{n+1} - y_N}{y_{n+1}}\right|}_{\leq 1}$$

$\leqslant \varepsilon$ dla dostatecznie dużych n.

Zatem $\lim_{n \to \infty} \frac{x_n}{y_n} = g$

2) $g = +\infty$. Wówczas $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \geqslant 1$, dla dostatecznie dużych n

Skoro $y_{n+1} - y_n > 0$ to $x_{n+1} - x_n > 0$. Wniosek: (x_{n+1}) jest od pewnego miejsca ciągiem rosnącym. Ponadto $x_{n+1} - x_n \geqslant y_{n+1} - y_n$

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+1} - x_n \geqslant y_{n+1} - y_n \\ x_n - x_{n-1} \geqslant y_n - y_{n-1} \\ \vdots \\ x_{N+1} - x_N \geqslant y_{N+1} - y_N \end{array}\right\}$$ sumując ten system nierówności

$= x_{n+1} - x_N \geqslant y_{n+1} - y_N$, czyli $x_{n+1} \geqslant y_{n+1} - y_N + x_N$.

Wnioskujemy zatem, że $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Skoro $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = +\infty$

to $\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 0$. Korzystając z twierdz. Stolza z $g=0$

oraz $\lim_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = 0$, wnioskujemy, że $\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = 0$.

czyli $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

PRZESTRZENIE METRYCZNE

Definicja: Niech X będzie zbiorem oraz niech $d: X \times X \to \mathbb{R}_{\geq}$. Mówimy, że d jest metryką na X jeśli spełnia następujące warunki:

(1) $d(p,q) = 0 \iff p = q$

(2) $\forall_{p,q \in X}$ mamy $d(p,q) = d(q,p)$ – symetria

(3) $\forall_{p,q,r \in X}$ mamy $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$

Wówczas (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną, a d odległością (metryką).

Przykłady:

$k \in \mathbb{N}$, $X = \mathbb{R}^k = \{(x_1, \dots, x_k) : x_i \in \mathbb{R}\}$. $\vec{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\vec{p}, \vec{q}$

$d_1(\vec{p}, \vec{q}) = \sum_{i=1}^{k} |p_i - q_i|$

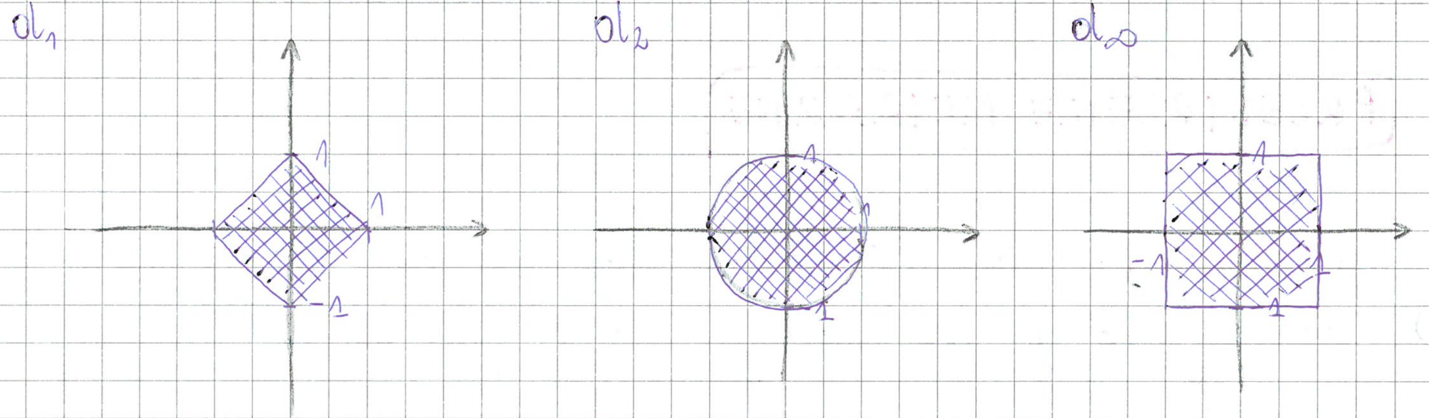
$d_2(\vec{p}, \vec{q}) = \left(\sum_{i=1}^{k} |p_i - q_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ – metryka pitagorejska

$d_\infty(\vec{p}, \vec{q}) = \max_{i \in \{1,\dots,k\}} |p_i - q_i|$

(X, d_i), $i \in \{1, 2, \dots, \infty\}$ jest przestrzenią metryczną

Definicja: Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, $p \in X$, $r > 0$. Wówczas $\{q \in X : d(p,q) < r\}$ nazywamy kulę o środku w punkcie p i promieniu r i oznaczamy $K(p, r)$.

Przykład: $k = 2$, $X = \mathbb{R}^2$ $K(\vec{0}, 1)$



Definicja: (X, d) - przestrzeń metryczna, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ciąg elementów przestrzeni. Mówimy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zbieżnym jeśli istnieje $x \in X$ t, że $(\ast)$ $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{N \in \mathbb{N}} \forall_{n > N}$ $d(x_n, x) < \varepsilon$ i piszemy $\lim_{n \to \infty} x_n = x$.

x nazywamy granicą $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Uwaga: $(\ast)$ oznacza, że $x_n \in K(x, \varepsilon)$

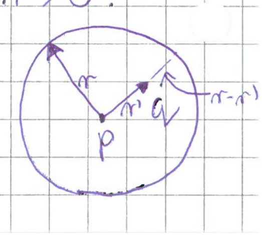
Definicja: Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną, oraz $\Theta \subset X$. Mówimy, że Θ jest zbiorem **otwartym** jeśli: $\forall_{p \in \Theta} \exists r > 0$ t, że $K(p, r) \subset \Theta$.

Przykład: $k = 1$, $X = \mathbb{R}$, d_1

$]a, b[= \{p \in \mathbb{R} : a < p < b\}$ - zbiór otwarty.

Przy okazji $]a, b[= K\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$

Stwierdzenie: (X, d) - przestrzeń metryczna, $p \in X$, $r > 0$. Wówczas $K(p, r)$ jest zbiorem otwartym.



Dowód: Niech $q \in K(p, r)$ czyli $d(p, q) = r' < r$

Rozważmy $K(q, r-r')$. Niech $s \in K(q, r-r')$. Wówczas

$$d(p,s) \leq \underbrace{d(p,q)}_{= r'} + \underbrace{d(q,s)}_{< r-r'} < r' + r - r' = r$$

Zatem $s \in K(p,r)$. **WNIOSEK:** $K(q, r-r') \subset K(p,r)$ ■

Wykład Analiza I 28.10.2015

wyk. 8.

Stwierdzenie: Niech (X, d) - przestrzeń metryczna oraz $\{\Theta_\lambda\}_\lambda$ rodzina podzbiorów otwartych przestrzeni X. Wówczas:

(i) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Theta_\lambda$ jest zbiorem otwartym

(ii) $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ zbiór $\bigcap_{i=1}^{n} \Theta_{\lambda_i}$ jest zbiorem otwartym

(iii) $\emptyset$ oraz X są otwarte

Dowód: Niech $p \in X$ t, że $p \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Theta_\lambda$. $\exists \lambda_0 \in \Lambda$ t, że $p \in \Theta_{\lambda_0}$. $\exists r > 0$ t, że $K(p,r) \subset \Theta_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Theta_\lambda$.

bo otwarty

(ii) Niech $p \in X$ t, że $p \in \bigcap_{i=1}^{n} \Theta_{\lambda_i}$. Zatem $\forall i = 1, \dots, n$ $p \in \Theta_{\lambda_i}$.
Θ_{λ_i} są otwarte, a więc $\exists r_1, \dots, r_n > 0$ t, że $K(p, r_i) \subset \Theta_{\lambda_i}$.
Niech $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Wówczas $\forall i = 1, \dots, n$ $K(p,r) \subset \Theta_{\lambda_i}$
a więc $K(p,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Theta_{\lambda_i}$.

(iii) X - jest otwarty - oczywiste.
$\emptyset$ - prawie oczywiste. ■

Definicja: Niech (X, d) - przestrzeń metryczna oraz $Y \subset X$. Mówimy, że $p \in X$ jest punktem skupienia zbioru Y jeśli $\forall r > 0\ \exists q \in Y, q \neq p$ t, że $q \in K(p, r)$.

Definicja: (X, d) - przestrzeń metryczna. Mówimy, że zbiór $F \subset X$ jest domknięty, jeśli zbiór $F^C = X \setminus F$ jest otwarty.

WNIOSEK: Niech $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną domkniętych podzbiorów X. (F^C - dopełnienie zbioru F, $F^C = F'$).

(i) $\bigcap_\lambda F_\lambda$ jest domknięty

(ii) $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda$ $\bigcup_{i=1}^{n} F_{\lambda_i}$ jest zbiorem domkniętym

(iii) $X, \emptyset$ - są zbiorami domkniętymi

Stwierdzenie:

(X, d) przestrzeń metryczna oraz $E \subset X$. Istnieje zbiór domknięty F t, że $E \subset F$ oraz $G \subset X$ jest domknięty i $E \subset G$ to $F \subset G$

Dowód: Niech $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie rodziną zbiorów domkniętych przestrzeni F? zawierających E. Rodzina $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ jest niepusta, bo $X \in \{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Wówczas $F \overset{def}{=} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ spełnia warunki stwierdzenia. F oznaczamy $\overline{E}$ i nazywamy $\boxed{\text{domknięciem } E}$

Stwierdzenie:

(X, d) przestrzeń metryczna. Niech $E \subset X$. Wówczas $p \in \overline{E} \iff \exists$ ciąg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ elementów E t, że $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.

Dowód: Przypuśćmy, że $p \notin \overline{E}$. Skoro $X \setminus \overline{E}$ jest zbiorem otwartym to $\exists r > 0 : K(p, r) \subset X \setminus \overline{E}$. A więc $K(p, r) \cap E = \emptyset$, gdyż $E \subset \overline{E}$. Czyli dla każdego ciągu $(p_n \in E)$ mamy $d(p_n, p) > r$.

ciąg (p_n) nie może być zbieżny do p. Mamy więc wynikanie $\Leftarrow$.

Wynikanie $\Rightarrow$

Przypuśćmy, że $\nexists (p_n)$, $p_n \in E$ t, że $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Wówczas $\exists r>0$ t, że $K(p,r) \cap E = \emptyset$.

W innym przypadku $\forall n \in \mathbb{N}$ $K(p,\frac{1}{n}) \cap E \neq \emptyset$, niech $p_n \in K(p,\frac{1}{n}) \cap E$

Łatwo sprawdzić, że ciąg $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ zbiega do p.

Rozważmy zbiór $G = X \setminus K(p,r)$ - zbiór domknięty i $E \subset G$.

Ponadto $p \notin G$, a więc $p \notin \overline{E} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ $(\overline{E} \subset G)$ ■

Przykład: $K=1$ $X=\mathbb{R}$ $E=\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ $d_1(p,q)=|p-q|$

Ponieważ każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych to korzystając z powyższego twierdzenia $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$.

Przykład: $(\mathbb{R}, d_1)$ - jak wyżej $a,b\in\mathbb{R}$ $a<b$.

$]a,b[= \{x\in\mathbb{R} : a<x<b\}$ - otwarty

$[a,b] = \{x\in\mathbb{R} : a\leq x\leq b\}$ - domknięty

$]-\infty, a[$ - otwarty

$]-\infty, a]$ - domknięty itd.

zbiory otwarte

Definicja: (X,d) - p. metryczna, $\{O_\lambda\}$ i niech $E\subset X$.

Mówimy, że $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest $\boxed{\text{pokryciem}}$ E jeśli $E\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$.

Definicja: (X,d) - p. metryczna. $K\subset X$. Mówimy, że zbiór K jest <u>zwarty</u>, jeśli dla dowolnego pokrycia $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ zbioru K $\exists n\in\mathbb{N}$ oraz $\exists \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\Lambda$ t, że $K\subset\bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$.

Twierdzenie: Niech K będzie zbiorem zwartym przestrzeni metrycznej X. Wówczas K jest zbiorem domkniętym oraz $\forall p \in X \ \exists r > 0$ t, że $K \subset K(p, r)$.

Dowód: Udowodnimy, że zbiór $X \setminus K$ jest zbiorem otwartym.
Niech $p \in X \setminus K$: $\forall q \in K \ \exists r_q$ t, że $K(p, r_q) \cap K(q, r_q) = \emptyset$,
np. $r_q = \frac{1}{2} d(p, q)$.
Wówczas $\{K(q, r_q)\}_{q \in K}$ jest pokryciem K. Wybieramy $q_1, q_2, \ldots, q_n \in K$ t, że $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(q_i, r_{q_i})$. Zauważmy, że $K(p, r) \subset X \setminus K$ dla $r = \min\{r_{q_1}, r_{q_2}, \ldots, r_{q_n}\}$.
Czyli $X \setminus K$ - otwarte, a więc K - domknięte.

II części twierdzenia: $p \in X$. Zauważmy, że $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(p, n) \supset K$.
Czyli $\{K(p, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest pokryciem K. $\exists n_1, \ldots, n_m$: $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} K(p, n_i)$.
Kładąc $r = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ mamy $K \subset K(p, r)$ -
- K jest zbiorem ograniczonym i domkniętym.

3.11.2015 Wykład Analiza I wyk. 8

Przypomnienie: (X,d), $K \subset X$ to K domknięty i ograniczony.

Cel na dziś: wykazanie, że zbiór $F \subset \mathbb{R}^k$, który jest domknięty i ograniczony jest też zwarty.

Stwierdzenie:
(X,d) - przestrzeń metryczna, $K \subset X$ - zb. zwarty i $F \subset K$ - domknięty. Wówczas F jest zbiorem zwartym.

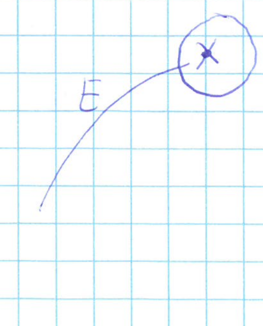
Dowód:
Niech $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ będzie pokryciem F: $F = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$.
Zauważmy, że $O = X \setminus F$ jest zbiorem otwartym. Wówczas $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \cup O$ (gdyż mamy $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \cup O$).

K jest zbiorem zwartym, więc istnieje $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ t. że $K \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n} \cup O$. Skoro $F \subset K$ oraz $F \cap O \neq \emptyset$ to to $F \subset O_{\lambda_1} \cup \dots \cup O_{\lambda_n}$ ■.

Stwierdzenie: Niech $K \subset X$ będzie zbiorem zwartym oraz $E \subset K$ podzbiór, który nie jest skończony. Wówczas E ma punkt skupienia należący do K.

Dowód: (nie wprost)
Przypuśćmy, że ~~dla~~ $\forall p \in K$ p nie jest punktem skupienia zbioru E.
Wówczas istnieje $r_p \in \mathbb{R}_{>0}$ t. że $K(p, r_p) \cap E$ jest co najwyżej zbiorem 1-punktowym.

Punkt skupienia



Zauważmy że $\{K(p, r_p)\}_{p\in K}$ jest pokryciem K.

Istnieje pokrycie skończone $K \subset K(p_1, r_{p_1}) \cup \ldots \cup K(p_m, r_{p_m})$

$\cup$

zatem E. Z konstrukcji $E \cap (K(p_1, r_{p_1}) \cup \ldots \cup K(p_m, r_{p_m}))$

jest zbiorem skończonym

czyli E musiałby być skończony a nie jest $\lightning$ ∎

$\boxed{\text{Wniosek}}$: Niech K będzie zbiorem zwartym oraz $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z K. Wtedy istnieje **podciąg** $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny do elementu ze zbioru K. {za E weź $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$}.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$: Niech $\{I_n\}$ będzie rodziną niepustych odcinków $I_n = [a_n, b_n]$ taką że $I_{n+1} \subset I_n$ wówczas

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

(rodzinę zstępującą odcinków)

↳ zawsze istnieje punkt, który należy do wszystkich odcinków

$\boxed{\text{Dowód}}$: $E = \{a_m : n\in\mathbb{N}\}$. ~~Dla każdego~~

$\forall\, n>m$ mamy $a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$.

Zatem $a_n \leq b_1$. Zbiór E jest ograniczony z góry przez b_1

Niech $x = \sup E$. Wówczas łatwo się przekonać, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ x\in I_n$.

a więc $\underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset}_{\text{teza twierdzenia}}$.

$\boxed{\text{Uwaga}}$: Kostka w $\mathbb{R}^k$ to zbiór postaci $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_k, b_k]$.

Wersja powyższego twierdzenia dla kostek: jeśli $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną kostek w przestrzeni $\mathbb{R}^k$ to $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

Twierdzenie: Kostka w $\mathbb{R}^k$ jest zbiorem zwartym.

Dowód (nie wprost)

$I_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}^k$.

odległość

Niech $\delta = \left(\sum_{q=1}^{k} (b_i - a_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Jest jasne $\forall_{s,t \in I} \ d_2(s,t) \le \delta$.

delta

Przypuśćmy, że I_1 (kostka) nie jest zbiorem zwartym. Niech $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ będzie pokryciem I_1, z którego nie daje się wybrać pokrycia skończonego.

Rozważmy $c_i = \frac{a_i + b_i}{2}$ oraz 2^k wyznaczonych przez nie kostek:

Istnieje kostka I_2, jedna z 2^k powyższych) taka, że z pokrycia I_2 rodziną $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ nie da się wybrać pokrycia skończonego. Kontynuując rozumowanie z I_2 definiujemy $I_3, I_4, \dots$ itd. t, że $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ oraz $\forall_{s,t \in I_n} \ d_2(s,t) \le 2^{-n+1} \delta$ (*)

p należy do przecięcia wszystkich kostek.

Z uwagi powyższej: istnieje $p \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Istnieje $\lambda_0 \in \Lambda$ t. że $p \in O_{\lambda_0}$. Ponieważ O_{λ_0} jest zbiorem otwartym, ~~ti~~ to ~~istnieje~~ $\exists r > 0$ t. że $K(p, r) \subset O_{\lambda_0}$.

Korzystając z (*) widzimy, że dla dostatecznie dużego n $I_n \subset K(p, r)$ takiego że $(2^{-n+1} \delta < r)$ i wnioskujemy, że $I_n \subset O_{\lambda_0}$. Sprzeczność, bo założyliśmy, że I_n nie da się pokryć skończoną liczbą $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. ■

Twierdzenie:

Niech $F \subset \mathbb{R}^k$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

(1) F jest domknięty i ograniczony

(2) F jest zwarty

(3) Każdy nieskończony podzbiór $E \subset F$ ma punkt skupienia p należący do ~~F~~ F $(p \in F)$

Dowód:
- $2 \Rightarrow 1$ było i zachodzi nie tylko dla zwartych podzbiorów $\mathbb{R}^k$.
- $1 \Rightarrow 2$ istnieje kostka $\underbrace{}_{I \subset \mathbb{R}^k}$ taka że $F \subset I$ (bo F-ograniczony)

Skoro I jest zbiorem zwartym to F jako podzbiór domknięty I jest zbiorem zwartym.
- $1 \Leftrightarrow$ $2 \Rightarrow 3$ było i zachodzi nie tylko w kontekście $\mathbb{R}^k$.

Pozostało do wykazania, że $3 \Rightarrow 1$. Dowód tego wynikania (nie wprost).

→ Przypuśćmy, że F nie jest zbiorem ograniczonym. Wówczas $\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists x_n \in \mathbb{R}^k$ t. że $d(\vec{x_n}, 0) > n$.
Wówczas łatwo pokazać, że $F = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nie ma punktów skupienia.

→ Przypuśćmy, że zbiór F nie jest domknięty. Weźmy $p \in \overset{\text{domknięcie}}{\overline{F}} \setminus F$.
$\forall_n \exists x_n \in F$ t. że $d(p, x_n) < \frac{1}{n}$. Jedynym punktem skupienia zbioru $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ jest $\lim x_n = p$.
Skoro $p \notin F$ to dostajemy sprzeczność z (3) ■

4. 11. 2015 Wykład Analiza I wyk. 9

Zbiory spójne

Definicja: (X, d) - metryczna, $A, B \subset X$. Mówimy, że A, B są oddzielone jeśli $\bar{A} \cap B = \emptyset$, $A \cap \bar{B} = \emptyset$.

Uwaga: Jeśli A, B są oddzielone to istnieją zbiory otwarte $O_1, O_2 \subset X$ t. że $A \subset O_1$, $B \subset O_2$ oraz $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. (To jest prawda, ale dowód później)

~~Uzasadnienie ponieważ~~ $\cancel{\bar{A} \cap B = \emptyset}$ ~~to~~ $\cancel{\forall p \in B \; \exists r_p > 0}$ ~~t. że~~ $\cancel{K(p, r_p) \cap A = \emptyset}$. ~~Podobnie~~ $\cancel{\forall q \in A \; \exists r_q > 0}$ ~~t. że~~ $\cancel{K(q, r_q) \cap B =}$ ~~Kładzę~~ $\cancel{O_1 = \bigcup_{q \in A} K(q, r_q)}$ ~~oraz~~

Definicja (X, d) - metryczna, $E \subset X$. Mówimy, że E jest zbiorem niespójnym, jeśli ~~istnieją~~ $\exists A, B$ zbiory niepuste oddzielone t. że $E = A \cup B$.

Definicja (X, d) - metryczna, $F \subset X$. Mówimy, że F jest zbiorem spójnym, jeśli nie jest niespójny.

Twierdzenie $(\mathbb{R}, d_2)$ oraz $E \subset \mathbb{R}$. Wówczas E jest zbiorem spójnym

standardowa metryka w $\mathbb{R}$ $d_2(x, y) = |x - y|$

wtedy i tylko wtedy gdy $\forall x, y \in E$ oraz $z \in \mathbb{R}$ t. że $x < z < y$ mamy $z \in E$.

Uwaga: Podzbiorami spójnymi w $\mathbb{R}$ są odcinki $]a, b[$, $[a, b[$, $[a, b]$, $]a, b]$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $]-\infty, a]$, $]-\infty, a[$, $]b, +\infty[$, $[b, +\infty[$, $\mathbb{R}$.

Dowód: Jeśli $\exists z \in \mathbb{R}$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$ t. że $z \notin E$ oraz $x < z < y$ to kładziemy $A_z = E \cap]-\infty, z[$, $B_z = E \cap]z, +\infty[$.

$E = A_z \cup B_z$ (bo $z \notin E$). Ponadto $\overline{B_z} \subset [z, +\infty[$ i $A_z \subset]-\infty, z[$ to $\overline{B_z} \cap A_z = \emptyset$. Podobnie $B_z \cap \overline{A_z} = \emptyset$. Czyli nie jest zbiorem spójnym.

Na odwrót jeśli zbiór E nie jest spójny. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ - oddzielone i $E = A \cup B$. Weźmy $x \in A$, $y \in B$. Bez straty ogólności możemy założyć, że np. $x < y$. Niech $z = \sup(E \cap [x, y])$. Wówczas po pierwsze $z \in \overline{A}$.

uzasadnienie dalej w postaci lematu.

Skoro $\overline{A} \cap B = \emptyset$ oraz $z \in \overline{A}$ to $z < y$. Ponadto $z \geqslant x$. Mamy więc $z \in \mathbb{R}$ t. że $x \leq z < y$.

Jeśli $z = x$ (czyli $z \in A$) to ponieważ $A \cap \overline{B} = \emptyset$ to $z \notin \overline{B}$.

Zatem istnieje $z_1 \in \mathbb{R}$ $z < z_1 < y$, $z_1 \notin B$. Wtedy $x < z_1 < y$ oraz $z_1 \notin E$. ■

~~UWAGA~~:

Lemat: Niech $F \subset \mathbb{R}$ ograniczony z góry oraz $z = \sup(F)$. Wówczas $z \in \overline{F}$.

Dowód: Ponieważ $z = \sup(F)$ to $\forall_{\varepsilon > 0}$ $z - \varepsilon$ nie jest ograniczeniem zbioru F. W szczególności $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in F$ t. że $x_n > z - \frac{1}{n}$. Inaczej $0 < z - x_n < \frac{1}{n}$. A zatem $\lim_{n\to\infty} (z - x_n) = 0$ i $z = \lim_{n\to\infty} x_n$

Z jednego z poprzednich twierdzeń $z \in \overline{F}$. ■

CIĄGŁOŚĆ

Definicja: (X,d) - metryczna $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest ciągła w punkcie $p \in X$, jeśli $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ takie, że jeśli $d(p,q) < \delta$ to $|f(p) - f(q)| < \varepsilon$.

Stwierdzenie: $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w $p \in X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $(p_n)_{n=1}^{\infty}$, $p_n \in X$ zbieżnego do p mamy ciąg $(f(p_n))_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do $f(p)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$ to $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$

Dowód: Przypuśćmy, że f - ciągła oraz $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p$. Niech $\varepsilon > 0$ - dowolne, $\delta > 0$ takie jak w powyższej definicji.

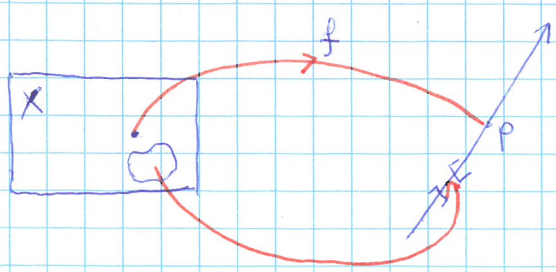
$\exists N > 0$ t. że $\forall n > N$ $d(p_n, p) < \delta$. Widzimy, że $|f(p_n) - f(p)| < \varepsilon$ dla każdego $n > N$. Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$.

Na odwrót, jeśli f nie jest ciągłą funkcją to $\exists \varepsilon > 0$:
$\forall n > 0$ $\exists q_n$ t. że $d(p, q_n) < \frac{1}{n}$ oraz $|f(p) - f(q_n)| > \varepsilon$.
Widzimy, że $\lim q_n = p$ oraz $(f(q_n))_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do $f(p)$.

Definicja: Jeśli $f: X \to \mathbb{R}$ jest ciągła dla wszystkich $p \in X$, to mówimy, że f jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie:

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ - otwartego, zbiór $f^{-1}(\mathcal{O}) \subset X$ jest otwarty.



Przypomnienie:
$f^{-1}(\mathcal{O}) = \{p \in X : f(p) \in \mathcal{O}\}$

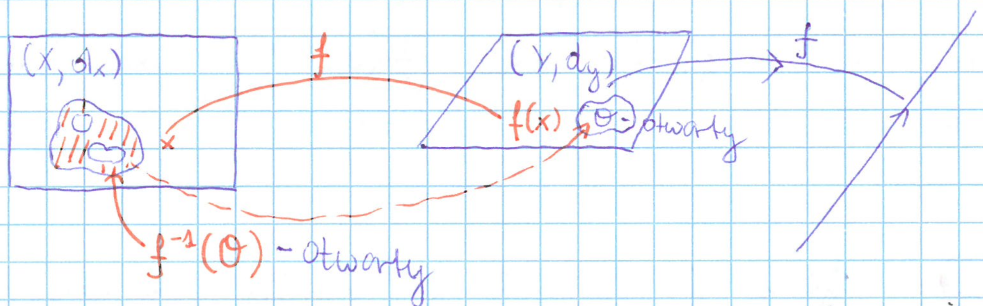
Dowód:

Niech $p \in X$. Weźmy $f(p) \in \mathbb{R}$ oraz ustalmy $\varepsilon > 0$. Rozważmy odcinek $I =]f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon[\subset \mathbb{R}$ – otwarty zbiór.
$f^{-1}(I) \subset X$ – otwarty, $p \in f^{-1}(I)$ (gdyż $f(p) \in I$).

$\exists \delta > 0$ t.że $K(p,\delta) \subset f^{-1}(I)$. To oznacza $\forall q: d(p,q) < \delta$ $f(q) \in I$ czyli $|f(q) - f(p)| < \varepsilon$.

Na odwrót, niech $f: X \to \mathbb{R}$ – ciągła oraz $O \subset \mathbb{R}$ – otwarty. Przypuśćmy, że $p \in f^{-1}(O)$. Wówczas $f(p) \in O$,
$\exists \varepsilon > 0$ $]f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon[\subset O$.
$\exists \delta > 0$ t.że $q \in X$ $d(q,p) < \delta$ to $f(q) \in]f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon[\subset O$.
Innymi słowy $f(K(p,\delta)) \subset O$, co zapisujemy: $K(p,\delta) \subset f^{-1}(O)$

Uwaga: Pojęcie ciągłości rozważa się w szerszym kontekście:
(X, d_X), (Y, d_Y) $f: X \to Y$: $p \in X$ f ciągła w $p \in X$, gdy
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $d_X(q,p) < \delta$ to $d_Y(f(p), f(q)) < \varepsilon$.



Twierdzenie: (X, d_X), (Y, d_Y) – metryczna, $f: X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, jeśli $\forall O \subset Y$ – otwarty $f^{-1}(O) \subset X$ otwarty.

~~Wówczas~~ **Wniosek**: (X, d_X), (Y, d_Y), (Z, d_Z) $f: Y \to Z$,
$g: X \to Y$ – ciągłe.
Rozważmy $f \circ g: X \to Z$ t.że $f \circ g(x) = f(g(x))$.
Wówczas $f \circ g$ jest funkcją ciągłą.

$\mathcal{O} \subset Z$ - otwarty. $(f \circ g)^{-1}(\mathcal{O}) = \underbrace{g^{-1}(\overbrace{f^{-1}(\mathcal{O})}^{\text{otwarty, bo } f \text{ ciągła}})}_{\text{otwarty, bo } g \text{ ciągła a } f^{-1}(\mathcal{O}) \text{ - otwarty}}$

Wykład 10.11.2015 Analiza I

(X, d_X), (Y, d_Y) - metryczne $f: X \longrightarrow Y$ - ciągła

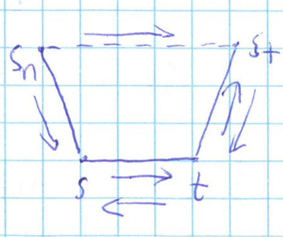
- $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ to $\lim_{n\to} f(x_n) = f(x)$
- $\mathcal{O} \subset Y$ - otwarty $\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{O})$ - otwarty

Kwaziprzykład

(X, d_X) - metryczna, rozważmy funkcję $f: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie $f(s,t) = d_X(s,t)$. Na $X \times X$ wprowadzimy metrykę $d_{X\times X}((s,t),(p,q)) = d_X(s,p) + d_X(t,q)$.

Wówczas ~~Niech~~ (s_n, t_n) jest ciągiem zbieżnym do (s,t) gdy $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$

Ciągłość f: $\lim_{n\to\infty} |f(s_n,t_n) - f(s,t)| \stackrel{?}{=} 0$



$d_X(s_n,t_n) \leq d(s_n,s) + d(s,t) + d(t,t_n)$.

a więc $d_X(s_n,t_n) - d_X(s,t) \leq d_X(s_n,s) + d_X(t_n,t)$.

Z drugiej strony mamy

$d_X(s,t) \leq d_X(s,s_n) + d_X(s_n,t_n) + d_X(t_n,t)$

a więc $d_X(s,t) - d_X(s_n,t_n) \leq d_X(s_n,s) + d_X(t_n,t)$

czyli $|d_X(s_n,t_n) - d_X(s,t)| \leq d_X(s_n,s) + d_X(t_n,t) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

czyli $\lim_{n\to\infty} f(s_n,t_n) = f(s,t)$ i $f = d_X$ jest ciągła.

Riemx

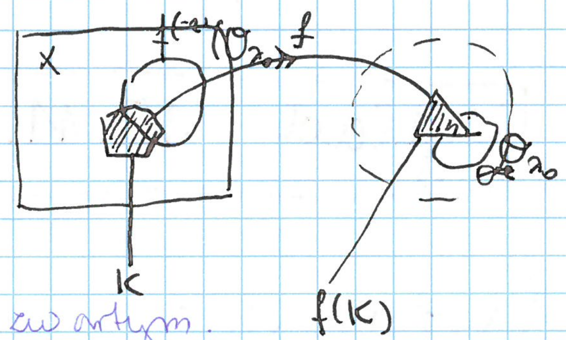
Twierdzenie:

(X, d_X), (Y, d_Y) - przestrzenie metryczne

$f: X \longrightarrow Y$ - ciągła

$K \subset X$ - zwarty

Wówczas $f(K)$ jest zbiorem zwartym.



Dowód:

Niech $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ - rodzina podzbiorów otwartych przestrzeni Y. t. że $f(K) \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$. Wówczas $\{f^{-1}(O_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ jest rodziną otwartych podzbiorów przestrzeni X t. że $K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(O_\lambda)$

Niech $\lambda_1, \lambda_n \in \Lambda$. $K \subset f^{-1}(O_1) \cup \ldots \cup f^{-1}(O_{\lambda_n})$

zwartości

a wówczas $f(K) \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \ldots \cup O_{\lambda_n}$ ∎

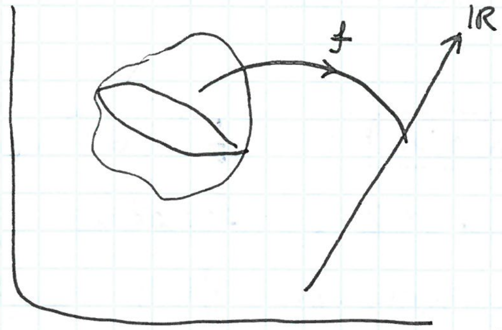
Wniosek:

(X, d_X) - metryczna zwarta, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas

$\exists\, s \in X$ t. że $f(s) = \sup_{t\in X} f(t)$. Podobnie $\exists\, q \in X$ t. że

$f(q) = \inf_{p\in X} f(p)$ (funkcja ciągła na zbiorze zwartym przyjmuje swoje kresy.

Dowód:



X - zwarta to $f(X) \subset \mathbb{R}$ zwarty, a więc domknięty i ograniczony.

$M = \sup f(X) \in \overline{f(X)} = f(X)$

zbiór domknięty

Innymi słowy $\exists\, s \in X$ t. że $M = f(s)$.

Podobnie $m = \inf f(x) \in \overline{f(X)} = f(x)$ $\exists\, q \in X : m = f(q)$. ∎

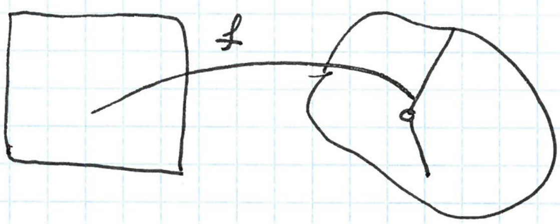
Twierdzenie:

(X, d_X), (Y, d_Y) - metryczne, $f: X \to Y$ - ciągła, X - spójna. Wówczas $f(X) \subset Y$ jest spójny.

Dowód: (nie wprost)

Przypuśćmy, że $f(X)$ nie jest zbiorem spójnym. Czyli $\exists\, A, B$ - rozdzielone niepuste t. że $f(X) = A \cup B$.

$\bar{A} \cap B = \emptyset = A \cap \bar{B}$



Weźmy $C = f^{-1}(A)$, $D = f^{-1}(B)$.
Ponieważ $A \cap B = \emptyset$ to $C \cap D = \emptyset$.

Udowodnimy mocniejszą własność: $\bar{C} \cap D = \emptyset$. Przypuśćmy, że $x \in \bar{C} \cap D$.
To oznacza, że $\exists\, p_n \in C$: $x = \lim_{n\to\infty} p_n$. A wówczas $\cancel{f(x)} =$
$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(p_n)$.

bo f jest ciągła

Skoro $p_n \in C$ oraz $C = f^{-1}(A)$ to $f(p_n) \in A$. A więc $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) \in \bar{A}$

Ponadto $f(x) \in B$.

Wniosek: $f(x) \in \bar{A} \cap B$. Skoro $\bar{A} \cap B = \emptyset$ to sprzeczność, więc $\bar{C} \cap D = \emptyset$. Podobnie $C \cap \bar{D} = \emptyset$. Czyli sprzeczność, bo X - spójne.
Widzimy, że $f(X)$ - spójny, jeśli X - spójny. ■

Wniosek (Lemat Darboux)
(X, d) - metryczne spójna, $f: X \to \mathbb{R}$ ciągła wówczas $f(X$ jest odcinkiem:

$\forall_{a,b \in f(X)}$ oraz $\forall_c : a < c < b$, $\exists p \in X$ t. że $c = f(p)$

Konkurs: (X,d)-metryczne pokazać, że jeśli $A, B \subset X$ t. że $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ to istnieją zbiory otwarte O_A, O_B t. że $A \subset O_A$, $B \subset O_B$ oraz $O_A \cap O_B = \emptyset$.

17. 11. 2015 - Wykład Analiza I wyk. 11

Przypomnienie: (X, d_X), (Y, d_Y) $f: X \to Y$ jest ciągła na X

$\forall_{\varepsilon>0} \forall_{p\in X} \exists \delta_p > 0 : d_X(q,p) < \delta_p \Rightarrow d(f(p), f(q)) < \varepsilon$

Definicja: Mówimy, że $f: X \to Y$ jest funkcją jednostajnie ciągłą, jeśli $\forall_{\varepsilon>0} \exists \delta > 0 : d_X(q,p) \leq \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(q)) \leq \varepsilon$.

Twierdzenie: Niech $f: X \to Y$ będzie funkcją ciągłą na X oraz X będzie przestrzenią zwartą. Wówczas f jest funkcją jednostajnie ciągłą.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $p \in X$. f jest ciągła w p zatem istnieje δ_p takie, że jeśli $q \in K(p, \delta_p)$ to $d_Y(f(p), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Zauważmy, że $\{K(p, \frac{\delta_p}{2})\}_{p\in X}$ jest pokryciem X.

X - zwarta $\Rightarrow \exists p_1, \dots, p_n \in X : X = K(p_1, \frac{\delta_{p_1}}{2}) \cup K(p_2, \frac{\delta_{p_2}}{2}) \cup \dots \cup K(p_n, \frac{\delta_{p_n}}{2})$

Weźmy $\delta = \min\left(\frac{\delta_{p_1}}{2}, \frac{\delta_{p_2}}{2}, \dots, \frac{\delta_{p_n}}{2}\right) \in \mathbb{R}_{>0}$.

Niech $p, q \in X$: $d_X(p,q) < \delta$. $\exists k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$p \in K(p_k, \frac{\delta_{p_k}}{2})$.

Wówczas $d_X(q, p_k) \leq d_X(q,p) + d_X(p, p_k) \leq \frac{\delta_{p_k}}{2} + \frac{\delta_{p_k}}{2} = \delta_{p_k}$

Szacujemy $d_Y(f(p), f(q))$:

$$d_Y(f(p), f(q)) \leq d(f(p), f(q)) + d(f(p_k), f(q)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

RÓŻNICZKOWALNOŚĆ

Definicja: Niech $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ $x \in]a,b[$. Mówimy, że f jest różniczkowalna w x jeśli istnieje $c \in \mathbb{R}$ taka, że $f(x+h) = f(x) + c \cdot h + r(x,h)$ gdzie $\lim_{h \to 0} \frac{r(x,h)}{h} = 0$.

Stwierdzenie: f, x - j.w. Wówczas f jest różniczkowalna w $x \iff$ istnieje granica $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ i wówczas $c = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Dalej c oznaczamy symbolem $f'(x)$.

Dowód: Jeśli f jest różniczkowalna to $\overbrace{\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - c \right| = \frac{r(x,h)}{h}}^{\exists c \text{ oraz } r(x,h) \text{ i mamy}}$ $\xrightarrow[h \to 0]{} 0$ a więc $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = c$.

W drugą stronę: jeśli $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \xrightarrow{h \to 0} c$ to $f(x+h)-f(x)-ch \equiv r(x,h)$ oraz $\frac{r(x,h)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Definicja: Mówimy, że $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $]a,b[$ jeśli jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in]a,b[$.

Stwierdzenie: Jeśli $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w $x \in X$ to f jest ciągła w $x \in X$.

Dowód: Niech $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ i załóżmy bez straty ogólności, że $x_n \neq x$ dla $n \in \mathbb{N}$.

$$f(x_n) - f(x) = \frac{f(x_n)-f(x)}{x_n - x} \cdot (x_n - x) = \left\{ \begin{array}{l} h_n = x_n - x \\ x_n = x + h_n \\ \lim_{n \to \infty} = 0 \end{array} \right\} = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \cdot h_n \xrightarrow[n \to \infty]{} f'(x) \cdot 0 = 0$$

czyli $\lim_{n \to \infty} (x_n) = f(x)$ ■

Stwierdzenie: Niech $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, $g:]a,b[\to \mathbb{R}$, $x \in]a,b[$.
Przypuśćmy, że f, g różniczkowalne w x. Wówczas

(i) $f+g$ jest różniczkowalna w x i $(f+g)'(x) = f'(x)+g'(x)$

(ii) $f \cdot g$ –||– ——||—— –||– i $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$

reguła Leibnize

Dowód: (i) $\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)+g'(x)$

(ii) $\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h} = \frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$

Wniosek:

(a) ponieważ $f(x)=x$ jest różniczkowalna $(f'(x)=1)$ to $g(x)=x^n$ jest funkcją różniczkowalną i indukcyjnie z reguły Leibniza dostajemy $g'(x)=n\cdot x^{n-1}$.
Ponadto każdy wielomian jest funkcją różniczkowalną.

(iii) Jeśli $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ $f(x) \neq 0$ dla wszystkich $y \in]a,b[$ oraz f jest różniczkowalne w $x \in]a,b[$ to $\frac{1}{f}:]a,b[\to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w $x \in]a,b[$ oraz $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{1}{f^2(x)}\cdot f'(x)$

Dowód (iii)

$$\frac{\frac{1}{f(x+h)} - \frac{1}{f(x)}}{h} = \frac{1}{f(x)\cdot f(x+h)}\cdot\frac{f(x)-f(x+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\frac{1}{(f(x))^2}\cdot f'(x)$$

$\boxed{\text{Wnioski}}$ (kontynuacja) :

(b) jeśli f, g różniczkowalne w x oraz $g \neq 0$ $x \in]a,b[$ to

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

! dowód: reguła Leibniza + (iii) dla $f \cdot \frac{1}{g}$

Funkcja $e(x)$ $\mathbb{R} \ni x \longmapsto e(x) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Stwierdzenie}}$:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ mamy $e(x+y) = e(x) \cdot e(y)$.

$\boxed{\text{Dowód}}$: Oznaczamy $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Nier. Bernoulliego

$(1+a)^n \geq 1 + na$

dla $a > -1$

Rozważmy
$$\frac{e_n(x+y)}{e_n(x)e_n(y)} = \frac{\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)^n}{\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n} =$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{x \cdot y}{n^2} - \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{x \cdot y}{n^2}}\right)^n = \left(1 - \frac{xy}{n^2\left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)}\right)^n \geq 1 - \frac{xy}{n\left(1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}\right)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$$

a więc $\frac{e(x+y)}{e(x) \cdot e(y)} \geq 1$. $(*)$

Iloraz odwrotny

$$\frac{e_n(x)e_n(y)}{e_n(x+y)} = \left(\frac{1 + \frac{x+y}{n} + \frac{xy}{n^2}}{1 + \frac{x+y}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{xy}{n^2\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)}\right)^n \geq 1 + \frac{xy}{n\left(1 + \frac{x+y}{n}\right)}$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \implies \frac{e(x) \cdot e(y)}{e(x+y)} \geq 1. \quad (**)$$

$(*) + (**) \Rightarrow$ równość

Stwierdzenie: Funkcja $e: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i rosnąca.

Dowód

- **Obserwacja 1.:** $e(x) \geqslant 1 + x$ dla ~~∀~~ $x \in \mathbb{R}$.

gdyż $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 + x$. (*)

$$e_n(x) \xrightarrow{h \to \infty} e(x)$$

Zatem dla $y > x$ mamy $e(y) = e(x + y - x) = e(x)\,e(y-x) \geqslant e(x)(1 + y - x) > e(x)$

- **Obserwacja 2.:** ~~$x > -1$~~ $x < 1$ mamy $e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.

$\frac{1}{e(x)} = e(-x) \geqslant 1 - x \Rightarrow e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.

Udowodnimy, że e jest ciągła w $x = 0$.

$$x \overset{(*)}{\leqslant} e(x) - e(0) = e(x) - 1 \underset{x \leq 1}{\leqslant} \frac{1}{1-x} - 1$$

z twierdzenia o 3 ciągach $\lim_{x \to 0} e(x) = 1 = e(0)$ – mamy ciągłość $e(x)$ w $x = 0$.

Ciągłość w dowolnym punkcie $h \to 0$ $e(x+h) - e(x) = e(x)(e(h) - 1) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

Zatem $\lim_{h \to 0} e(x+h) = e(x)$ i mamy ciągłość.

Stwierdzenie: $e: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalne oraz $e'(x) = e(x)$

Dowód: Różniczkowalność:

podobnie rozumujemy ale nier. (i), (j) się odwracają

$$\frac{e(x+h) - e(x)}{h} = e(x) \cdot \frac{e(h) - 1}{h} \xrightarrow[\substack{h \to 0 \\ h > 0}]{} e(x)$$

$$\frac{e(h)-1}{h} \xrightarrow[\substack{h < 0 \\ h \to 0}]{} e(x)$$

Przypuśćmy, że $h > 0$ wówczas

$$1 \underset{(i)}{\leqslant} \frac{e(h) - 1}{h} \underset{(j)}{\leqslant} \frac{\frac{1}{1-h} - 1}{h} = \frac{1 - (1-h)}{h(1-h)} = \frac{1}{1-h} \xrightarrow[h \to]{}$$

Wykład Analiza I 18.11.2015 wyk. 12

$e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad e(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

e jest różniczkowalna, ściśle monotoniczna: $x<y \quad e(x)<e(y)$

$e(x+y) = e(x)\,e(y), \quad e(0)=1, \quad e(1)>1$ ($e(1) = e$)

Zatem $e(n) = e^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$e(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_{>0}, \quad \lim_{n\to\infty} e(-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} = 0$

Ostatecznie e jest bijekcją $e: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ i posiada funkcję odwrotną, którą nazywamy logarytmem i oznaczamy symbolem $\log : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$ t. że $\log e^x = x$

Pytanie: Czy logarytm jest funkcją różniczkowalną i $\log'(e(x)) = \frac{1}{x}$? Tak. (ale odp. później)

Definicja: $g: \,]a,b[\, \longrightarrow \,]c,d[\,$ oraz $f: \,]c,d[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ to złożenie $f\circ g$ definiujemy wzorem $f\circ g(x) = f(g(x)) \quad x\in \,]a,b[$

W szczególności $f\circ g : \,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$.

Przykład: $f=g=e^x, \quad f\circ g(x) = e(e(x))$

Oznaczenie $e(x) = e^x$

Twierdzenie: Niech f i g - j.w. Przypomnijmy, że f oraz g są różniczkowalne na $]c,d[$ i $]a,b[$ odpowiednio. Wówczas $f\circ g$ jest funkcją różniczkowalną na odcinku $]a,b[$ oraz

$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\,g'(x)$.

$\log(s\cdot t) = \log s + \log t$

Dowód:

$$\frac{(f\circ g)(x+h) - f\circ g(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \left\{ g(x+h) = g(x) + g'(x)\cdot h + r(x,h) \right\}$$

$$= \frac{f(g(x) + g'(x)\cdot h + r(x,h)) - f(g(x))}{h} = \left\{ \tilde{h} = g'(x)\,h + r(x,h) \right\} =$$

$$= \frac{f(g(x)+\tilde{h}) - f(g(x))}{h} = \frac{\cancel{f(g(x))} + f'(g(x))\tilde{h} + \tilde{r}(g(x),\tilde{h}) - \cancel{f(g(x))}}{h} =$$

$$= \frac{f'(g(x))\overbrace{g'(x)h + r(x,h)}^{\tilde{h}} + \tilde{r}(g(x),\tilde{h})}{h} = f'(g(x))\cdot g'(x) + \frac{\tilde{r}(g(x),\tilde{h})}{\tilde{h}}\cdot\frac{\tilde{h}}{h}$$

$$\frac{\tilde{r}(g(x),\tilde{h})}{\tilde{h}} \xrightarrow{h\to 0} 0 \qquad \frac{\tilde{h}}{h} \xrightarrow{h\to 0} g'(x) \qquad \frac{r(x,h)}{h} \xrightarrow{h\to 0} 0$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{gdy } h\to 0 \text{ to} \\ \tilde{h} \longrightarrow 0 \text{ zatem} \\ \lim\limits_{h\to 0} \frac{\tilde{r}(g(x),\tilde{h})}{\tilde{h}} = 0 \end{array} \right\} = f'(g(x))\,g'(x)$$

Przykład: 1. $\left(e^{(e^x)}\right)' = e^{e^x}\cdot e^x$

2. $x^{(x^x)}$

3. $(x^x)^x$

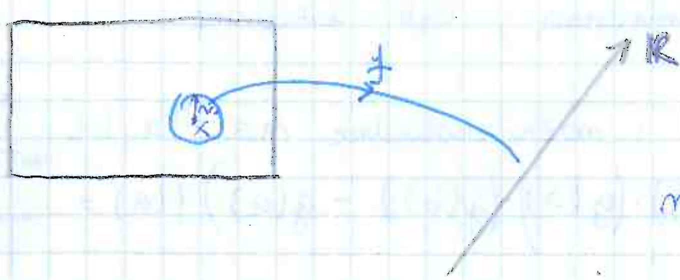
4. x^x

Obliczyć pochodne.

Ad. 4 $\quad x^x = e(\log x^x) = \overset{f(x)}{e}^{\overbrace{x\log x}^{g(x)}}$

$$(x^x)' = e^{x\log x}\cdot(x\log x)' = x^x(\log(x)+1)$$

Definicja: (X,d) - metryczna, $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ oraz $x\in X$. Mówimy, że ~~jest~~ f ma lokalne minimum w punkcie $x\in X$ jeśli $\exists\, r>0$ t. że $\forall y\in K(x,r)\ f(y)\geq f(x)$.



maksimum - analogicznie

Twierdzenie:

Niech $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ ma minimum lokalne w $x \in]a,b[$ i przypuśćmy, że f jest różniczkowalna w x. Wówczas $f'(x)=0$.

Dowód: $\exists\, \delta>0$ t. że $\forall y \in]x-\delta, x+\delta[$ $f(y) \geq f(x)$.

- Niech $h>0$: i dostatecznie małe, tak, żeby $x+h<x+\delta$, $h<\delta$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Biorąc $\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$

- Z drugiej strony niech $h<0$, ale $h>-\delta$, wówczas $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$ i $\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \leq 0$, a zatem

$$f'(x)=0$$

Jeśli f ma maksimum lokalne to $-f$ ma minimum lokalne i $f'(x)=0$.

Twierdzenie: Uogólnione twierdzenie o wartości średniej Lagrange'a

Niech $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłe i różniczkowalne na $]a,b[$.

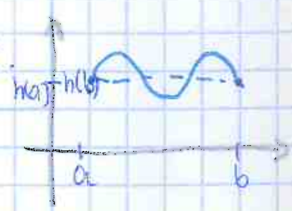
Wówczas $\exists\, x \in]a,b[$ t. że $(f(b)-f(a)) \cdot g'(x) = (g(b)-g(a)) \cdot f'(x)$.

Dowód:

Zdefiniujmy $h: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ wzorem $h(t) := (f(b)-f(a)) \cdot g(t) - (g(b)-g(a)) \cdot f(t)$. t - zmienna; a,b - ustalone

WŁASNOŚCI h

1) h jest ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna na $]a,b[$.



2) $h(a) = (f(b)-f(a)) \cdot g(a) - (g(b)-g(a)) f(a) =$

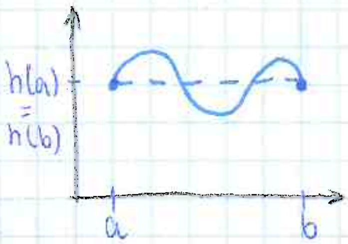
$= f(b)\, g(a) - g(b) \cdot f(a)$

$h(b) = (f(b)-f(a))\, g(b) - (g(b)-g(a))\, f(b) = g(a)\, f(b) - g(b) f(a)$

$$h(a) = h(b)$$

Istnieją dwie możliwości:

i) h jest funkcją stałą, wówczas $h'(x)=0$ dla wszystkich $x\in\,]a,b[$, a więc $(f(b)-f(a))g'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)$



ii) h nie jest funkcją stałą. Ponieważ h jest funkcją ciągłą oraz $[a,b]$ jest zwarty to h przyjmuje swoje kresy.

ii1) $\exists\, x_0\in\,]a,b[$ t. że $h(x_0)>h(a)$. Wówczas $\sup_{[a,b]} h > h(a)=h(b)$ a zatem $\exists\, x\in\,]a,b[$ w którym h przyjmuje maksimum. oraz $h'(x)=0$ a to oznacza $(f(b)-f(a))g'(x)=(g(b)-g(a))f'(x)$

ii2) $\exists\, x_0\in\,]a,b[$ t. że $h(x_0)<h(a)$. ~~Wówczas~~ i dalej tak samo ■

Wniosek: Twierdzenie o wartości średniej Lagrange'a.

$f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ - ciągła oraz różniczkowalna na $]a,b[$ to $\exists\, x\in\,]a,b[$ t. że $f(b)-f(a)=f'(x)(b-a)$

Kładziemy $g(x)=x$ w tw. ogólnym i dostajemy twierdzenie Lagrange'a.

Wykład Analiza I 24.11.2015 wyk. 13

$\boxed{\text{Cel}}$: Czy $\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną; udowodnimy że tak oraz $\log'(x) = \frac{1}{x}$

Jeśli $\log(x)$ jest funkcją różniczkowalną to różniczkując tożsamość $\log(e^x) = x$, dostajemy na mocy twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej:

$1 = x' \quad \log(e^x)' = \log'(e^x)\, e^x \Rightarrow \log'(e^x) = \frac{1}{e^x}$; kładąc $y = e^x$

mamy $\log'(y) = \frac{1}{y} \quad \forall_{y \in \mathbb{R}_{>0}}$

Twierdzenie: Niech $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ różniczkowalna na $]a,b[$

Wówczas:

(i) jeśli $f'(x) \geq 0$ dla $x \in]a,b[$ to f jest funkcją rosnącą

(ii) jeśli $f'(x) = 0$ dla $x \in]a,b[$ to f jest funkcją stałą

(iii) jeśli $f'(x) \leq 0$ dla $x \in]a,b[$ to f jest funkcją malejącą

Dowód: Weźmy $x_1, x_2 \in]a,b[$, $x_1 < x_2$. Wówczas $\exists\, \xi \in]x_1, x_2[$ takie, że $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)\cdot(x_1 - x_2)$ $\begin{cases} \leq 0 & \text{dla } i) - f. \text{ ~~maleje~~ rośnie} \\ = 0 & \text{dla } ii) - f. \text{ jest stała} \\ \geq 0 & \text{dla } iii) - f. \text{ ~~rosnie~~ maleje} \end{cases}$

* f. ciągła, bijekcja, ale odwrotna nie jest ciągła?

Twierdzenie:

Niech $f:]a,b[\to]c,d[$ będzie ciągłą bijekcją.

Wówczas $f^{-1}:]c,d[\to]a,b[$ jest ciągła.

Dowód: $g = f^{-1}(x)$; $O \subset]a,b[$; musimy pokazać, że $g^{-1}(O)$ jest zbiorem otwartym.

$(f^{-1})^{-1}(O) = f(O)$

Wystarczy pokazać, że obraz $\mathcal{O}$ postaci $\mathcal{O} =]\alpha,\beta[\subset]a,b[$ czyli $f(]\alpha,\beta[) \subset]c,d[$ jest otwarty.

$\exists A,B$ t.że $f(]\alpha,\beta[)$ jest odcinkiem o końcach A,B.

Są 4 możliwości: $f\,]\alpha,\beta[=$ $[A,B]$ ← są wykluczone
$]A,B]$ ←
$[A,B[$ ←
$]A,B[$

np. jeśli $f(]\alpha,\beta[) =]A,B]$ to $\exists x \in]\alpha,\beta[$ t.że $f(x)=B$.
W szczególności $f(]x-\varepsilon,x]) \cap f[x,x+\varepsilon[)$ zawiera punkt $C<B$.
Zatem istnieje $\xi_1 \in]x-\varepsilon,x[$ oraz $\xi_2 \in]x,x+\varepsilon[$ t.że $f(\xi_1) = C = f(\xi_2)$. Sprzeczność z injektywnością f.

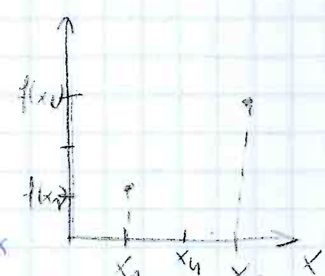
Twierdzenie: Niech $]a,b[\subset \mathbb{R}$ oraz $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ – różniczkowalna na $]a,b[$ i $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in]a,b[$. Wówczas $f(]a,b[)$ jest odcinkiem otwartym, f zadaje bijekcję $f:]a,b[\longrightarrow f(]a,b[)$ oraz $f^{-1}: f(]a,b[) \to]a,b[$ jest funkcją różniczkowalną i $f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Dowód:

Krok 1. f jest różnowartościowa: gdyby $\exists\, x_1, x_2 \in]a,b[$ $f(x_1)=f(x_2)$ oraz $x_1 \neq x_2$ to z twierdzenia Lagrange'a: $f(x_1) - f(x_2) = f'(\xi)(x_1-x_2)$
$0 = f'(\xi) = 0$

Krok 2. f jest monotoniczne.

Przypuśćmy, że f nie jest monotoniczne i np.:
$\exists\; x_1 < x_2 < x_3$ t.że $f(x_1) < f(x_2)$ a $f(x_2) > f(x_3)$
Przypuśćmy, że $f(x_3) \in]f(x_1), f(x_2)[\Rightarrow$ f ciągła, tw. Darboux
$\exists\; x_4 \in]x_1,x_2[$ $f(x_4) = f(x_3)$



sprzeczność z różnowartościowością f. Szczerze nie pamiętam przeprowadzenia tego dowodu

przypadki różnowartościowości? (

Jeśli $f(x_1) \in \,]f(x_3), f(x_2)[$ to $\exists x_4 \in \,]x_2, x_3[: f(x_1) = f(x_4)$ –
– sprzeczność z różnowartościowością f.

[illegible]

Krok 3. $f(]a,b[)$ jest zbiorem otwartym, co wynika z monotoniczności f. i jej ciągłości. → rozumowanie podobne jak w poprzednim krokach

Krok 4. Zatem $f :]a,b[\to]c,d[$ gdzie $c, d \in \mathbb{R}$
lub $c = -\infty$
lub $d = +\infty$

czyli $f^{-1} \;]c,d[\longrightarrow]a,b[$ jest funkcją ciągłą. W szczególności

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \iff f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \,!$$

Krok 5. Iloraz różnicowy: weźmy $h \to 0$ i rozważmy

$$\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h} = \left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \text{ tak, że} \\ y+h = f(x+k) \text{ oraz } \underbrace{h \to 0 \iff k \to 0} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{f^{-1}(f(x+k)) - f^{-1}(f(x))}{f(x+k) - f(x)} = \frac{x+k-x}{f(x+k)-f(x)} = \frac{k}{f(x+k)-f(x)} \xrightarrow[\substack{h\to 0 \\ \Updownarrow \\ k \to 0}]{}$$

$$= \frac{1}{f'(x)} \quad \text{czyli} \quad \left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \blacksquare$$

$$\boxed{\log'(x) = \frac{1}{x}}$$

Twierdzenie: (de L'Hospitale v. 1)

Niech $f, g :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ – różniczkowalne, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a,b[$ t. że $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$

Jeśli $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ gdzie $L \in \mathbb{R}$ lub $L = +\infty$, $L = -\infty$.

Wówczas istnieje $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Uwaga: $\lim_{x\to a^+} h(x) = A \in \mathbb{R}$ jeśli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0}$ t. że $x \in]a, a+\delta[$ to $|h(x) - A| < \varepsilon$

$\lim_{x\to a^+} h(x) = +\infty$ jeśli $\forall_{M>0} \exists_{\delta>0}$ $x \in]a, a+\delta[$ to $h(x) > M$.

Podobnie definiujemy $\lim_{x\to a^+} h(x) = -\infty$.

Dowód: Rozszerzamy f, g do $[a,b[$ kładąc $f(a) = g(a) = 0$. ciągłe

uogólnione Twierdzenie o wartości średniej: $\forall_{x \in]a,b[} \exists \xi \in]a,x[$ t. że

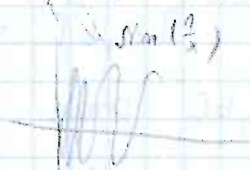
$$f(x) = (f(x) - f(a)) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot (g(x) - g(a)) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} g(x)$$

Inaczej $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ dla $\xi \in]a,x[$.

Mamy $x \longrightarrow a^+ \Rightarrow \xi \to a^+$. a zatem $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{\xi \to a^+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L$. ∎

Przykład: $f, g :]0, +\infty[$ gdzie $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $g(x) = x$.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$



$f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$g'(x) = 1$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ nie jest zbieżne.

Wykład Analiza I 25.11.2015 wyk. 14

Twierdzenie: Reguła de l'Hospitala V2.

Niech $f, g :]a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie $a > 0$, f - różniczkowalne

Oraz $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x)$. Przypuśćmy, że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, \infty[$

oraz istnieje granica $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Wówczas istnieje $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Dowód: Rozważmy funkcje $\varphi, \psi :]0, \frac{1}{a}[\longrightarrow \mathbb{R}$,

gdzie $\varphi(t) = f(\frac{1}{t})$, $\psi(t) = g(\frac{1}{t})$.

Zauważmy, że $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

Podobnie $\lim_{t \to 0^+} \psi(t) = \lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

Pochodna:
$$\left.\begin{array}{l} \varphi'(t) = (f(\frac{1}{t}))' = f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2}) \\ \psi'(t) = \dots = g'(\frac{1}{t}) \cdot (\frac{1}{t^2}) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \lim_{t \to 0} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

tw. Stolze

Z pierwszej wersji tw. de l'Hospitala mamy
$$L = \lim_{t \to 0^+} \cancel{\frac{\varphi(1/t)}{}} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \blacksquare$$

Twierdzenie: Reguła de l'Hospitala V3.

Niech $f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne t, że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$ oraz $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$. Jeśli $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

to istnieje $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

$\boxed{\text{Dowód}}$ $L\in\mathbb{R}$: Niech $\varepsilon>0$ i niech $y\in\,]a,b[$ t. że

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|<\varepsilon$$ jeśli $\xi\in\,]a,y[$. Bez straty ogólności

możemy założyć, że dla $x\in\,]a,y[$ mamy $f(x)>0$, $g(x)>0$

$\cancel{\alpha(y;x)=1-\frac{g(y)}{g}}$

$$\alpha(y;x)=\frac{1-\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{f(y)}{g(x)}}$$ gdzie $x\in\,]a,y[$.

Zauważmy, że:

1) $\lim_{x\to a^+}\alpha(y;x)=1$.

2) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\,\alpha(y,x)$. W szczególności z tw. o wartości średniej $\exists\ \xi\in\,]a,y[$ że $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\alpha(y,x)$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-L\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\alpha(y,x)-L\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}(\alpha(y;x)-1)+\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|=$$

$$\leq\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|\cdot|\alpha(y;x)-1|+\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-L\right|$$

dla x dostatecznie bliskich a^+ $\leq \varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$.

co kończy dowód dla $L\in\mathbb{R}$.

Dla $L=+\infty$ postępujemy następująco:

$\exists\ y\in\,]a,b[$ t. że $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\geq\frac{1}{\varepsilon}$; dalej wykonując te same kroki dostajemy $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\cdot\alpha(y;x)\geq\frac{1}{2\varepsilon}$

dla x dostatecznie bliskich a^+ mamy $\alpha(y;x)>\frac{1}{2}$

POCHODNE WYŻSZYCH RZĘDÓW I WZÓR TAYLORA

Jeśli $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna dla $x \in]a,b[$ t. że $f':]a,b[\to \mathbb{R}$ jest funkcją różniczkowalną to piszemy $(f')' = f''$. i f'' nazywamy drugą pochodną. Podobnie definiujemy n-tą pochodną funkcji f, którą oznaczamy symbolem $f^{(n)}$.

Od tej pory symbolem $\mathcal{O}$ będziemy oznaczać otwarty odcinek $\mathbb{R}$ ($\mathcal{O}$ może nie być ograniczony). Zbiór funkcji na $\mathcal{O}$, które są n-krotnie różniczkowalne i n-ta pochodna jest funkcją ciągłą na $\mathcal{O}$ oznaczamy symbolem $C^n(\mathcal{O})$.

Dla $f, g \in C(\mathcal{O})$ mamy $f \cdot g \in C^n(\mathcal{O})$, $f+g \in C^n(\mathcal{O})$.
oraz zachodzi uogólniony wzór Leibniza:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$ – dowód indukcja ze względu na n.

WZÓR TAYLORA

Niech $f \in C^{n-1}(\mathcal{O})$ i przypuśćmy, że istnieje n-ta pochodna $f^{(n)}$ na odcinku $]a,b[\subset \mathcal{O}$.

Zdefiniujmy funkcję $\varphi: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{1!} f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f^{(2)}(x) - \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)$$

φ j.w. jest funkcją różniczkowalną na $]a,b[$ i ciągłą na $[a,b]$

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x).$$

Rozważmy $\Phi_k(x) = \varphi(x) - \dfrac{\varphi(a)(b-x)^k}{(b-a)^k}$

1) $\Phi_k'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x) + \frac{\varphi(a)}{(b-a)^k} \cdot k(b-x)^{k-1}$

2) $\Phi_k(a) = 0 = \Phi_k(b)$

Z tw. o wartości średniej $\exists\, \xi \in]a,b[$ t, że $0 = \Phi_k(b) - \Phi_k(a) = \Phi_k'(\xi)(b-a)$

$\Rightarrow \Phi_k'(\xi) = 0$

Wstawiając do 1. dostajemy $\varphi(a) = \frac{(b-a)^k}{(n-1)!\,k}(b-\xi)^{n-k} f^{(n)}(\xi)$

Kładąc $x=a$ $h=b-a$ dostajemy wzór Taylora.

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot f^{(2)}(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + R_n(x,h),$$

gdzie $R_n(x,h) = \frac{h^k}{k\cdot(n-1)!} \cdot (x+h-\xi)^{n-k} f^{(n)}(\xi)$ gdzie $\xi \in]x, x+h[$

wzór Taylora — Reszta we wzorze Taylora

$\exists\, \Theta \in]0,1[: \xi = x + \Theta h.$

A wtedy $R_n(x,h) = \frac{h^n}{k(n-1)!}(1-\Theta)^{n-k} \cdot f^{(n)}(x+\Theta \cdot h).$

Wstawmy $k=n \Rightarrow R_n(x,h) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\Theta h).$

reszta w postaci Lagrange'a

Wykład Analiza I 1.12.2015 wyk.15

Stwierdzenie

Niech $f \in C^{n-1}(\mathcal{O})$, $x \in \mathcal{O}$ i przypuśćmy $\exists f^{(n)}(x)$.

$\mathcal{O}$, $C^n(\mathcal{O})$
$\mathcal{O}$ – odkrytki otwarte; $C^n(\mathcal{O})$ – f-cji różn. do stopnia i n-ta pochodna ciągła

Wówczas definiując $R_n(x,h)$ wzorem

$$R_n(x,h) = f(x, h) - f(x) - \sum \frac{f^{(k)}(x)h^k}{k!}$$

mamy $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R_n(x,h)}{h^n} = 0$.

Dowód: Rozważmy funkcję $f(h) = R(x,h)$ oraz $g(h) = h^n$.

Stosując $(n-1)$-krotnie regułę de l'Hôpitale dostajemy

$$\frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x) - f^{n}(x)\cdot h}{(n-1)!\cdot h} \xrightarrow{h\to 0} \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x)\right) = 0$$

Zatem $\lim\limits_{h\to 0} \frac{R_n(x,h)}{h^n} = 0$ ∎

Stwierdzenie

Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{O}$ i przypuśćmy, że $f'(x) > 0$.

Wówczas $\exists\, 0 < \delta$ t. że $\forall\, 0 < h < \delta$ mamy $f(x+h) > f(x)$ oraz $f(x-h) < f(x)$.

Dowód:

Niech $r(x,h) = f(x+h) - f(x) - hf'(x)$. Wówczas $\frac{r(x,h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

W szczególności $\exists\, \delta > 0$ t. że dla $|h| < \delta$ mamy

$\left|\frac{r(x,h)}{h}\right| < f'(x)$. Zatem $|r(x,h)| < |h| \cdot f'(x)$.

Dalej $f(x+h) - f(x) = f'(x)\cdot h + r(x,h) > 0$. dla $\delta > h > 0$

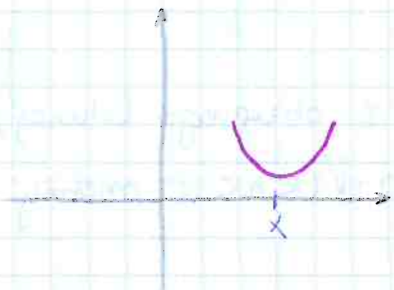
gdyż $r(x,h) > -h \cdot f'(x)$.

Podobnie $f(x-h) - f(x) = -f'(x) \cdot h + r(x,h) < 0$ dla $0<h<\delta$

gdyż $r(x,h) < h \cdot f'(x)$.

Uwaga: dla $f'(x)<0$ też mamy analog powyższego twierdzenia.

Rys.



Twierdzenie: Załóżmy, że f jest ciągła na $\mathcal{O}$, $x \in \mathcal{O}$ oraz f jest różniczkowalna na $\mathcal{O} \setminus \{x\}$

(1) Jeśli $\exists\, \delta > 0$ t. że dla $0<h<\delta$ mamy $f'(x+h) > 0$ oraz $f'(x-h) < 0$ to f ma w x minimum lokalne.

Dowód:

$f : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{U} \subset \mathcal{O}$ $\quad f|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, N

Funkcja $f|_{[x,x+h]}$ spełnia założenia twierdzenia o wartości średniej. Zatem $\exists\, \xi \in \,]x, x+h[$ t. że $f(x+h) - f(x) = f'(\xi) \cdot h > 0$

Podobnie $f|_{[x,x-h]}$ spełnia zał. tw. o wartości średniej.

Zatem $\exists\, \eta \in \,]x-h, x[$ $\quad f(x) - f(x-h) = f'(\eta) \cdot h < 0$

Ostatecznie f ma w x minimum lokalne.

Uwaga: mamy też analog powyższego twierdzenia dla maksimum.

Twierdzenie: (Warunek wystarczający istnienia minimum)
Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalne w pewnym otoczeniu $x \in \mathcal{O}$. Jeśli $f'(x)=0$ oraz $f''(x)>0$ to f ma w punkcie $x \in \mathcal{O}$ minimum lokalne.
Jeśli $f'(x)=0$ a $f''(x)<0$ to f ma w $x \in \mathcal{O}$ maksimum lokalne.

Dowód dla przypadku $f''(x)>0$.
Ponieważ $f'(x)=0$ oraz $f''(x)>0$ to z drugiego (ostatniego) stwierdzenia wnioskujemy, że $\exists \delta>0 : \forall 0<h<\delta$ mamy $f'(x+h)>f'(x)=0$ i
$f'(x-h)<f'(x)=0$
Korzystając z powyższego stwierdzenia dostajemy tezę.
■

Stwierdzenie
Niech $f \in C^{n-1}(\mathcal{O})$, $x \in \mathcal{O}$ i przypuśćmy istnieje $f^{(n)}(x) > 0$
Jeśli $f'(x) = f''(x) = \dots f^{(n-1)}(x) = 0$ to dla

(i) n parzystego funkcja f ma w punkcie $x \in \mathcal{O}$ jest minimum

(ii) n - nieparzystego f w x nie ma ekstremum.

Dowód: Wzór Taylora: $f(x+h) - f(x) - \cancel{f^{(n)}} \frac{f^{(n)} h^n}{n!} = R_n(x,h)$

mamy $\frac{R_n(x,h)}{h^n} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$. Zatem ~~istnieje~~ $\exists \delta>0$ t.że

$\forall\ 0<|h|<\delta$ mamy $\left|\frac{R_n(x,h)}{h^n}\right| < \left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|$

Zatem $f(x+h) - f(x) = \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!} + \frac{R_n(x,h)}{h^n}\right) h^n > 0$ (*)

dla n parzystych i $h : |h| < \delta$

Dla n nieparzystych wyrażenie $(*)$ zmienia znak i minimum brak.

Przykład: Rozważmy funkcję $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że $\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ a więc f - ciągła w $x=0$.

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h}}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \text{ gdyż } \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$$

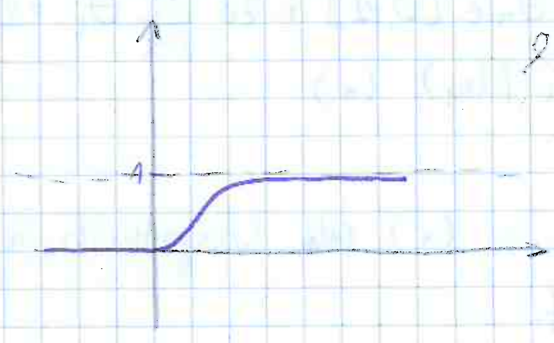
$$\lim_{x \to \infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$ Zatem f jest

różniczkowalne w $x=0$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

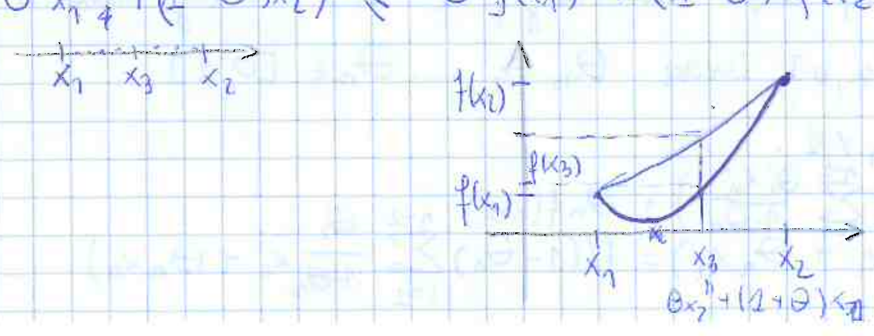
Dalej indukcyjnie można pokazać, że $\forall_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \; f^{(k)}(0) = 0$.

Wykres funkcji



Definicja: Niech $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest **wypukła** na odcinku $\mathcal{O}$ jeśli $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{O}$ oraz $\forall \Theta \in [0,1]$ mamy

$$f(\Theta x_1 + (1-\Theta)x_2) \leq \Theta f(x_1) + (1-\Theta) f(x_2)$$



np. exponens

$x_3 = \Theta x_1 + (1-\Theta) x_2$

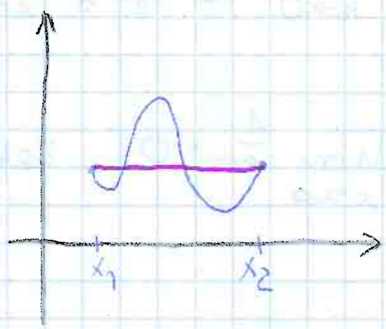
Wykład Analiza I 2.12.2015 wyk. 16

$[0,1] \ni \theta \longmapsto (\theta x_2 + (1-\theta)x_1, \ \theta f(x_2) + (1-\theta) f(x_1)) \in \mathbb{R}^2$

$$f(\theta x_2 + (1-\theta) x_1) \leq \theta f(x_2) + (1-\theta) f(x_1) \quad \forall \theta \in [0,1]$$

wypukłość f na odcinku $[x_1, x_2]$

Funkcja, która nie jest wypukła



Stwierdzenie:

Niech $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas f jest funkcją wypukłą na $[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla $\forall_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ oraz $\forall \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n \in [0,1]$ t. że $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$ mamy

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \theta_i f(x_i) \quad (*)$$

Dowód: Jeśli f spełnia $(*)$ dla wszystkich n to kładąc $n=2$ dostajemy wypukłość f.

Załóżmy, więc że f jest funkcją wypukłą.

Indukcja ze względu na n:

Dla $n=2$ mamy $(*)$, więc załóżmy, że $(*)$ mamy dla $n-1$.

Weźmy $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a,b]$ oraz $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_n \in [0,1]$.

Bez straty ogólności, $\theta_n \neq 1$.

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i x_i + \theta_n x_n\right) = f\left((1-\theta_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1-\theta_n} x_i + \theta_n x_n\right)$$

wyp. dla $n=2$ $\to$ $\leq (1-\theta_n) f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i x_i}{1-\theta_n}\right) + \theta_n f(x_n)$

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Theta_i}{1-\Theta_n} = 1 \right\} \leq (1-\Theta_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\Theta_i}{1-\Theta_n} f(x_i) + \Theta_n f(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \Theta_i f(x_i) \quad \blacksquare$$

wypukłość dla $n-1$

$\boxed{\text{Stwierdzenie}}$: $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad x_1, x_2, x_3 \in]a,b[$

(1) f jest wypukła, ~~jeśli~~ <=> gdy dla $x_1 < x_2 < x_3$ mamy

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(2) ———————— " ———————— mamy

$$\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

(3) ———————— " ———————— mamy

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

$\boxed{\text{Wniosek}}$:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$\boxed{\text{Dowód}}$:

$x_1 = \Theta x_1 + x_3 - \Theta x_3$

$x_2 = \Theta(x_1 - x_3) + x_3$

Mamy $x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \exists\, \Theta \in]0,1[$ $\quad x_2 = \Theta x_1 + (1-\Theta)x_3$

$x_2 - x_3 =$

gdzie $\Theta = \dfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ oraz $1-\Theta = \dfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$

f wypukła <=> $f(x_2) \leq \Theta f(x_1) + (1-\Theta) f(x_3)$ $\overset{(**)}{<=>}$ $\Theta f(x_1) + (1-\Theta) f(x_3) -$
$- (\Theta + (1-\Theta)) f(x_2) \geq 0$ <=>

$\iff \theta(f(x_1)-f(x_2)) + (1-\theta)(f(x_3)-f(x_2)) \geq 0 \iff$

$$\iff \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\cdot(-f(x_1)+f(x_2)) \leq \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}(f(x_3)-f(x_2))$$

Skoro $x_3-x_2>0$, $x_3-x_1>0$, $x_2-x_1>0$

$$\iff \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Punkt (2) podobnie, ale grupujemy wyrazy następująco:

(**) $\theta(f(x_1)-f(x_3)) + f(x_3)-f(x_2)$.

Punkt (3) też podobnie.

$\boxed{\text{Wniosek}}$: Jeśli $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła to istnieją granice

$$\left.\begin{aligned} f'_+(x) &\equiv \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ f'_-(x) &\equiv \lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\end{aligned}\right\}$$

- obydwa ciągi są monotoniczne i ograniczone ze względu na h, a więc zbieżne.

W szczególności $\lim\limits_{h\to 0^+} f(x+h)-f(x) = 0 = \lim\limits_{h\to 0^-} f(x+h)-f(x)$,

a zatem f jest funkcją ciągłą.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$: Funkcja $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$, która jest różniczkowalna jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $f':]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją rosnącą.

W szczególności, jeśli f jest 2-krotnie różniczkowalna to f jest wypukła $\iff f''(x)\geq 0$ dla $x\in]a,b[$.

Dowód: f wypukła to na mocy poprzedniego stw. po przejściu granicznym f' jest rosnące.

W drugą stronę: jeśli $f'(x)$ jest funkcją rosnącą to z twierdzenia o wartości średniej mamy

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\eta) \leqslant f'(\xi) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

$\exists \eta \in]x_1, x_2[$ tw. o wart. średniej

gdyż $\eta < \xi$

$\exists \xi \in]x_2, x_3[$

■

Przykład: $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, gdyż
$\exp''(x) = \exp(x) > 0$.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, ~~$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in [0,1]$~~

$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \frac{1}{n}$ $\quad y_i = \exp(x_i)$

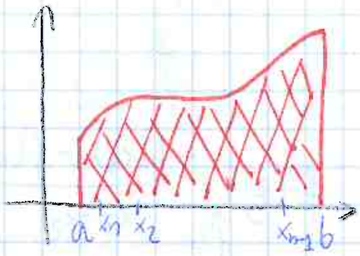
$$\sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \exp(x_i) = \frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n}$$

średnia geometryczna liczb $y_1, \dots, y_n > 0$

średnia arytmetyczna liczb $y_1, \dots, y_n > 0$

CAŁKA RIEMANNA

Rys.



Z grubsza całkę Riemanna to pole pod wykresem funkcji.

Definicja ~~Niech~~ Podziałem Π odcinka $[a,b]$ nazywamy dowolny zbiór $\Pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a,b]$ gdzie $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Piszemy $\Delta_i = x_i - x_{i-1}$

Jeśli $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną oraz Π jest podziałem $[a,b]$ to piszemy $m_i = \inf\limits_{x_{i-1} < x < x_i} f(x)$, $M_i = \sup\limits_{x_{i-1} < x < x_i} f$

Wielkość $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta_i$ nazywamy sumą dolną f ze względu na podział Π i oznaczamy $\underline{S}(f, \Pi)$.

Podobnie wielkość $\sum M_i \Delta_i$ nazywamy sumą górną f ze względu na podział Π i oznaczamy $\overline{S}(f, \Pi)$.

Uwaga: $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ $\quad m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

Wówczas $\forall_{\Pi}$ $m(b-a) \le \underline{S}(f, \Pi) \le \overline{S}(f, \Pi) \le M(b-a)$

Całka górna

$$\overline{\int_a^b} f = \inf_{\Pi} \overline{S}(f, \Pi)$$

gdzie Π to wszystkie możliwe podziały odcinka $[a,b]$

Całka dolna

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{\Pi} \underline{S}(f, \Pi)$$

Wykład Analiza I 8.12.2015 wyk. 17

$[a,b]$ - przedział całkowania

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - ograniczona $\inf(f), \sup(f) \in \mathbb{R}$

π - podział $[a,b]$ $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$

$\underline{S}(f,\pi)$ - suma dolna , $\underline{\int_a^b} f = \sup \underline{S}(f,\pi)$, - całka dolna

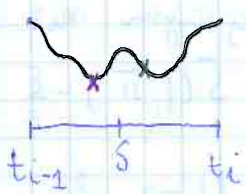
$\overline{S}(f,\pi)$ - suma górna , $\overline{\int_a^b} f = \inf \overline{S}(f,\pi)$ - całka górna

Definicja: Niech π, π' będą podziałami odcinka $[a,b]$, jeśli $\pi \subset \pi'$. Mówimy, że π' jest drobniejszy niż π.

Uwaga: Jeśli π' drobniejszy niż π to $\underline{S}(f,\pi') \geq \underline{S}(f,\pi)$,
$\overline{S}(f,\pi') \leqslant \overline{S}(f,\pi)$ $(*)$

Uzasadnienie $(*)$

Suma dolna się zwiększa przy rozdrobnieniach



Wkład do $\underline{S}(f,\pi')$ jest równy $\times(s - t_{i-1}) + \times(t_i - s) \geq \times(t_i - t_{i-1})$

Ponadto $\forall\, \pi$ - podział $[a,b]$ mamy

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{S}(f,\pi) \quad (**)$$

Jeśli $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna

Przykład: $[a,b] = [0,1]$. Rozważmy funkcję $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$\overline{\int_0^1} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_0^1} f$ czyli f nie jest całkowalna w sensie Riemanna.

Stwierdzenie

Funkcja $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall_{\varepsilon>0}$ $\exists$ podział π odcinka $[a,b]$, t. że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \varepsilon$.

Dowód: Jeśli spełniona jest powyższa nierówność, to (**) daje

$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \varepsilon$. Tak jest $\forall_{\varepsilon>0}$ a zatem

$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ i f jest funkcją całkowalną.

W drugą stronę. Przypuśćmy, że f jest całkowalna. Ustalmy $\varepsilon>0$. Wówczas $\exists$ π_1, π_2 - podziały $[a,b]$.

$$\underline{S}(f,\pi_1) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \int_a^b f. \qquad \overline{S}(f,\pi_2) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_a^b f.$$

Niech π będzie podziałem drobniejszym niż π_1 oraz π_2.

Wówczas $\underline{S}(f,\pi) + \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \int_a^b f \qquad \overline{S}(f,\pi) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \int_a^b f$.

Zatem $\overline{S}(f,\pi) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{S}(f,\pi) + \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Stwierdzenie

Niech $f, g: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - całkowalne, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Wówczas funkcja $\alpha f + \beta g$ jest całkowalna na $[a,b]$ oraz

$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \cdot \int_a^b g$.

Dowód: Niech ~~$\lambda \in \mathbb{R}$~~ $\lambda>0$

Zauważmy, że $\underline{S}(\lambda \cdot f, \pi) = \lambda \cdot \underline{S}(f,\pi) \Rightarrow \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Dla $\lambda<0$ $\underline{S}(\lambda \cdot f, \pi) = \lambda \cdot \overline{S}(f,\pi) \Rightarrow \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$

Wystarczy zatem wykazać, że $f+g$ jest całkowalne oraz $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Dalej korzystamy z następujących nierówności:

$$\underline{S}(f+g, \pi) \geqslant \underline{S}(f,\pi) + \underline{S}(g,\pi)$$
$$\overline{S}(f+g, \pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi)$$

$\exists$ podział π_1 odcinka $[a,b]$ t. że

$$\overline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Podobnie $\exists \pi_2$:

$$\overline{S}(g,\pi_2) - \underline{S}(g,\pi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Niech π będzie podziałem drobniejszym niż π_1 i π_2.

Wtedy nierówności w klamrze } z π zamiast π_1, π_2 odpowiednio są ciągle spełnione.

$$0 < \overline{S}(f+g, \pi) - \underline{S}(f+g,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi) - \underline{S}(f,\pi) - \underline{S}(g,\pi)$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Czyli $f+g$ jest funkcją całkowalną.

Zauważmy $\overline{S}(f,\pi) \leqslant \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$ oraz $\overline{S}(g,\pi) \leqslant \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2}$.

Zatem $\int_a^b (f+g) \leqslant \overline{S}(f+g,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) + \overline{S}(g,\pi)$

$$\leqslant \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon. \Rightarrow \int_a^b (f+g) \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Biorąc w rozumowaniu $-f, -g$ dostajemy $\int_a^b (f+g) \geqslant \int_a^b f + \int_a^b g$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g}$$

Twierdzenie:

Niech $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowalna i niech F będzie funkcją ciągłą na $[\inf(f), \sup(f)]$. Wówczas funkcja $F \circ f : [a,b]$ jest całkowalne na $[a,b]$.

Wniosek: ~~Jeśli f jes~~ zauważmy, że funkcja $id: [a,b] \to \mathbb{R}$, $id(x) = x$ jest całkowalne. Weźmy podział $\pi = \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\cdot\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$. Można sprawdzić, że $\overline{S}(id, \pi) - \underline{S}(id, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \frac{(b-a)^2}{n}$. Z naszego kryterium wynika, że id jest całkowalne.

Zatem $F = F \circ id$ jest funkcją całkowalną, jeśli F jest funkcją ciągłą. Ponadto jeśli f, g są całkowalne to $f+g$ też, a zatem biorąc $F(t) = t^2$ widzimy, że $(f+g)^2$ jest funkcją całkowalną. Podobnie $(f-g)^2$ a zatem $f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$ jest funkcją całkowalną.

1) F jest funkcją jednostajnie ciągłą na $[\inf(f), \sup(f)]$

Niech $\varepsilon > 0$; $\exists\, \delta > 0$ takie, że $|s-t| < \delta$ to $|F(s) - F(t)| < \varepsilon$.

Możemy założyć, że $\delta < \varepsilon$. Niech $\mathbb{R} \ni K = \sup_{[\inf(f), \sup(f)]} |F|$.

Skoro f jest całkowalne to $\exists\, \pi$ t. że $\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leq \delta^2$.

Niech $\pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ $\quad M_i = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} f$; $m_i = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} f$;

$M_i' = \sup_{[t_{i-1}, t_i]} F \circ f$, $m_i' = \inf_{[t_{i-1}, t_i]} F \circ f$.

Podzielmy wskaźniki $i \in \{1, \dots, n\}$ na dwie klasy A oraz B.

$i \in A$ jeśli $M_i - m_i < \delta$

$i \in B$ jeśli $M_i - m_i \geq \delta$

Zauważmy, że dla $i \in A$ mamy $M_i' - m_i' \leq \varepsilon$. - jednostajna ciągłość funkcji F.

Z drugiej strony mamy $\sum_{i \in B} \delta (t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq$

$\leqslant \overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leqslant \delta^2.$

Zatem $\sum_{i\in B} (t_i - t_{i-1}) \leqslant \delta.$

Obliczmy $\overline{S}(F\circ f, \pi) - \underline{S}(F\circ f, \pi)$ pamiętając, że $M_i' - m_i' \leqslant 2K$.

$\overline{S}(F\circ f, \pi) - \underline{S}(F\circ f, \pi) = \sum_{i\in A} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i\in B} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1})$

$\leqslant \varepsilon \sum_{i\in A}^{m} (t_{i} - t_{i-1}) + 2K\cdot\delta \leqslant \varepsilon\cdot(b-a) + 2K\varepsilon = \varepsilon(b-a) + 2K)$

dowolnie mała

Wykład Analiza I 9.12.2015 wyk.18

Własności całki Riemanna

(1) Niech $f_1, f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi na $[a,b]$. Przypuśćmy, że $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ dla wszystkich $x\in[a,b]$. Wówczas $\int_a^b f_1 \leqslant \int_a^b f_2$.

(2) Niech $a<b<c$ i niech $f: [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną na $[a,c]$. Wówczas f jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $[b,c]$ i $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

(3) Jeśli $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna to $|f| : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną oraz $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

Argument: $F(t) = |t|$ wówczas $|f| = F\circ f$

funkcja ciągła a więc ta jest całkowalna

Ponadto $f(x) \leqslant |f(x)|$ dla $x\in[a,b]$: $\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$.

oraz $-f(x) \leqslant |f(x)|$ dla $x\in[a,b]$: $-\int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$

a zatem $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

Notacja: jeśli $b < a$ to $\int_a^b f \overset{def}{=} -\int_b^a f$

Sumy wypunktowane

$f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ całkowalne oraz Π będzie podziałem $[a,b]$ t. że $\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon$, dla $\varepsilon > 0$

Niech $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$. Wypunktowaniem podziału Π nazywamy zbiór $\boxed{H} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ gdy $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Zauważmy $\underline{S}(f,\Pi) \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,\Pi)$

Wyrażenie $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ nazywamy sumą wypunktowaną i oznaczamy symbolem $S(f,\Pi,\boxed{H})$.

Mamy nierówność $\left|\int_a^b f - S(f,\Pi,\boxed{H})\right| < \varepsilon$.

Średnicą d_Π podziału Π nazywamy wielkość

$$d_\Pi = \max_{i\in\{1,\dots,n\}} (t_i - t_{i-1})$$

Twierdzenie: Niech $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz Π_n będzie ciągiem podziałów $[a,b]$ t. że $d_{\Pi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Niech $\boxed{H}_n$ będzie ciągiem wypunktowań podziałów Π_n.
Wówczas $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} S(f, \Pi_n, \boxed{H}_n)$.

Dowód: f jest jednostajnie ciągła na $[a,b]$
Korzystając z jednostajnej ciągłości mamy: $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta_\varepsilon}$ t. że
$\forall$ Π-podział $[a,b]$: $d_\Pi < \delta$ to $\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon$.

Niech δ będzie takie, że jeśli $|s-t| < \delta$. $\Rightarrow$ $|f(s)-f(t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$
dla wszystkich $s,t \in [a,b]$

Niech Π będzie podziałem t. że $d_\Pi < \delta$.

Wówczas $\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$ gdzie

$M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f = f(s)$ $\quad m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f = f(t)$ $\quad t \in [t_{i-1}, t_i]$

$s \in [t_{i-1}, t_i]$

Niezrobiony dowód tego, że funkcje ciągłe są całkowalne

a więc $M_i - m_i \le \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Ostatecznie $\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) \le \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$

Uwaga: Zauważmy, że podaliśmy inny dowód całkowalności funkcji ciągłych.

Kontynuując dowód zauważmy, że $\left| S(f, \Pi_n, \Xi_n) - \int_a^b f \right| \le \varepsilon$ jeżeli tylko $d_{\Pi_n} < \delta$. Skoro $d_{\Pi_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ to $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:$ $d_{\Pi_n} < \delta$ dla $n > N$. Co oznacza, że ciąg $S(f, \Pi_n, \Xi_n)$ jest zbieżny oraz $\lim_{n\to\infty} S(f, \Pi_n, \Xi_n) = \int_a^b f$.

~~Zastosowanie~~ :

Twierdzenie Niech $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną na $[a,b]$ i niech $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem $F(x) = \int_a^x f$ dla $x \in [a,b]$. Wówczas F jest funkcją ciągłą. Ponadto jeśli f jest funkcją ciągłą w punkcie $x \in \,]a,b[$ to f jest funkcją różniczkowalną w x oraz $F'(x) = f(x)$.

Dowód: f jest funkcją ograniczoną: niech $M \in \mathbb{R}_{>0}$ t.że $|f(x)| \leq M$ $x \in [a,b]$
Niech $x, y \in [a,b]$. $|F(x) - F(y)| = \left| \int_y^x f \right| \leq \left| \int_y^x |f| \right| \leq M\, |y - x|$,
co pokazuje, że F jest funkcją ciągłą (nawet jednostajnie).

Przypuśćmy, że f jest ciągła w x: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ t.że
jeśli $|x - t| \leq \delta$ to $|f(x) - f(t)| \leq \varepsilon$.
W szczególności mamy $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$
dla $t \in [x - \delta, x + \delta]$.
Niech $h > 0$; rozważmy iloraz różnicowy.

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f$$

a więc dla $h < \delta$ mamy

$$(f(x) - \varepsilon) \cdot h \leq \int_x^{x+h} f \leq (f(x) + \varepsilon) \cdot h \overset{}{\underset{h>0}{\Longrightarrow}} f(x) - \varepsilon \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(x) + \varepsilon$$

Innymi słowy $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon$. Zatem $\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$

dla $h < 0$ podobnie pokazujemy, że $\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$.

$\blacksquare$

Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego:

Niech $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną oraz
$F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a,b]$ różniczkowalną
na $]a,b[$ t.że $F'(x) = f(x)$ dla wszystkich $x \in]a,b[$.
Wówczas $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

Dowód: Niech $\pi = \{t_0, t_1, \dots t_n\}$ będzie podziałem $[a,b]$ t. że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) \leq \varepsilon$

Niech $\boxed{H}_{\pi} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ będzie wypunktowaniem podziału π t. że $\xi_i \in \,]t_{i-1}, t_i[$ $\quad f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \dfrac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$ tw. o wartości średniej

Zauważmy $\quad \left| S(f, \pi, \boxed{H}) - \int_a^b f \right| \leq \varepsilon$

Ponadto $\quad S(f, \pi, \boxed{H}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} F(t_i) \frac{F(t_i) - F(t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \left(F(t_i) - F(t_{i-1})\right) =$$

$$F(\cancel{t_1}) - F(a) + F(\cancel{t_2}) - F(\cancel{t_1}) + \dots + F(b) - \cancel{F(t_{n-1})}$$

$$= F(b) - F(a)$$

to kończy dowód bo $\left| F(b) - F(a) - \int_b^a f \right| \leq \varepsilon$ dla każdego $\varepsilon > 0$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

15. 12. 2015 Wykład Analiza I wyk. 19

Przypomnienie: $F \in C([a,b])$, f całkowalna na $[a,b]$

t. że istnieje F' na $]a,b[$ oraz $F' = f$ to

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Mówimy, że F jest funkcją pierwotną f.

Twierdzenie o całkowaniu przez części

Niech $F, G \in C([a,b])$, $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - całkowalne

Jeśli F, G są różniczkowalne na $]a,b[$ oraz $F' = f$, $G' = g$

to $\int_a^b F \cdot g = F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^b G \cdot f$.

Dowód Reguła Leibniza: $(F \cdot G)' = f \cdot G + g \cdot F$. -

funkcja całkowalna (jako iloczyn funkcji całkowalnych).

Korzystając z zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego

w zastosowaniu do funkcji $f \cdot G + g \cdot F$ mamy

$$\int_a^b (f \cdot G + g \cdot F) = F(b) G(b) - F(a) \cdot G(a). \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} f \cdot G, g \cdot F \text{ są} \\ \text{całkowalne} \end{array} \right\}$$

$$\int_a^b f \cdot G = F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^b f \cdot G$$

Twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie

Niech $\varphi \in C([a,b])$ będzie funkcją rosnącą na $[a,b]$ taką, że $\varphi([a,b]) = [c,d]$. Niech $f \in C([c,d])$. Jeśli φ jest funkcją różniczkowalną na $]a,b[$ oraz φ' jest całkowalna na $[a,b]$

to funkcja $[a,b] \ni x \longmapsto f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \int_c^d f$.

$\boxed{\text{Dowód}}$: Ponieważ f, φ są funkcjami ciągłymi to $f \circ \varphi$ jest ciągła. Dalej φ' jest całkowalna, a więc $x \longmapsto f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ jest całkowalna (jako iloczyn funkcji całkowalnych).

Rozważmy funkcję $F: [c,d] \to \mathbb{R}$ $F(x) = \int_c^x f$; $\overset{f \text{ ciągła}}{\underset{ZTRR}{\Rightarrow}} F' = f$.

W szczególności $(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$.

$$ZTRR \Rightarrow \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = F \circ \varphi(b) - F\varphi(a) = F(\underset{= d}{\varphi(b)}) - F(\underset{= c}{\varphi(a)}) =$$
$$= F(d) - F(c) = \int_c^d f - \int_c^c f.$$

$\boxed{\text{Definicja}}$: Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem o wyrazach zespolonych, tzn. $a_n \in \mathbb{C}$. Mówimy, że $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem zbieżnym jeśli istnieje $g \in \mathbb{C}$ t. że:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{N \in \mathbb{N}} \ \forall_{n > N} \ |a_n - g| < \varepsilon.$$

~~Uwaga~~ Jeśli $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżnym $\lim_{n \to \infty} a_n = g$.

$\boxed{\text{Uwaga}}$: Ciąg (a_n) jest zbieżny do $g \Leftrightarrow$ gdy ciągi $(\mathrm{Re}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(\mathrm{Im}(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ są zbieżne do $\mathrm{Re}(g)$, $\mathrm{Im}(g)$ odpowiednio.

Niech $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Wprowadźmy dla $m < n$ wyrażenia

$a_m + a_{m+1} + \dots a_n$ które oznaczamy symbolem $\sum_m^n a_n$.

W szczególności $\sum_{k=1}^n a_k$ oznaczamy S_n. Ciąg $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy szeregiem o wyrazach $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to jego granicę oznaczamy symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Stwierdzenie (Kryterium Cauchy'ego)

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists N\in\mathbb{N}:\ \forall_{n>m>N}\ \left|\sum_{m}^{n} a_n\right| < \varepsilon \quad (*)$$

Dowód: Powyższe $(*)$ jest warunkiem Cauchy'ego dla ciągu $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ − $|S_n - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_n\right|$.

Wniosek: Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny to ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do zera: $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ $\Rightarrow$ $|a_n| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużego n.

Dalej udowodnimy, że nie jest to warunek wystarczający. Na przykład szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ nie jest zbieżny.

Stwierdzenie Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg sum częściowych $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ jest ograniczony, tzn. $\exists M>0:\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} a_k < M$.

Dowód: Ciąg S_n jest rosnący, a więc jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ − nie jest zbieżny

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ − jest zbieżny do $\frac{\pi^2}{6}$

Stwierdzenie (szereg geometryczny)

Niech $x \in \mathbb{C}$. Wówczas

(1) Jeśli $|x| < 1$ to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ jest zbieżny oraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(2) Jeśli $|x| > 1$ to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ nie jest zbieżny.

Dowód:

(1) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1-x}$

(2) Jeśli $|x| > 1$ to x^n nie dąży do 0, gdy $n \to \infty$.

Stwierdzenie (Kryterium porównawcze)

(1) Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zespolonym t.że $|a_n| \leq c_n$. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ jest zbieżny to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ też jest zbieżny.

(2) ~~$n \in \mathbb{N}$ / ≥ 0~~ $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg rzeczywisty. $0 \leq b_n \leq |a_n|$. Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny ~~jest rozbieżny~~ to $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też nie jest zbieżny

Dowód:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ spełnia warunek Cauchy'ego.

Warunek Cauchy'ego dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \varepsilon$$ dla dostatecznie dużych m, n.

(2) Gdyby $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ był zbieżny to ciąg sum częściowych $\sum_{k=1}^{n} b_k$ byłby ograniczony przez M, a wtedy ciąg sum częściowych $\sum_{k=1}^{n} a_k$ byłby ograniczony przez M i szereg $\sum_{n=1}^{\infty}$ byłby zbieżny.

$\lightning$ ■

Twierdzenie (Kryterium zagęszczeniowe).
Niech $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Wówczas szereg o wyrazach $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg o wyrazach $(2^k a_{2^k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Uwaga: Zbieżność $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ jest równoważna zbieżności ~~$2a_1 + 4a_4 + 8a_8 + 16a_{16} + \ldots$~~
$a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$

Dowód: Oznaczmy $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. $t_k = \cancel{2a_1 + 4a_4 + \ldots} + 2^k a_{2^k}$. $a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{2^k}$.

Niech $n < 2^k$.

$S_n \leqslant a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1})$.
$\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k$

Jeśli $t_k < M$ to $S_n < M$, a więc ze zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} S_n$.

Z drugiej strony, jeśli $n > 2^k$. to $S_n \geqslant a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k})$

$\geqslant \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} \cdot a_{2^k} = \frac{1}{2}t_k \Rightarrow$

$\Rightarrow t_k \leq 2 \cdot S_n$

Jeśli $S_n < M$ to $t_k < 2 \cdot M$, a więc zbieżność $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implikuje zbieżność szeregu $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. ∎

Przykład: $a_n = \frac{1}{n}$ spełnia zał. kryt. zagęszczeniowego.

$$2^k a_{2^k} = 2^k \frac{1}{2^k} = 1$$

16.12.2015 Wykład Analiza I wyk. 20

Kryterium zagęszczeniowe: $a_n \in \mathbb{R}_{>0}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - malejący

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny $\Leftrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Twierdzenie: Niech $p \in \mathbb{R}_{>0}$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny, jeśli $p>1$ a rozbieżny dla $p \leq 1$.

Dowód: ciąg $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia założenia kryterium zagęszczeniowego. Kładąc $a_n = \frac{1}{n^p}$ mamy $2^k a_{2^k} = 2^k \cdot 2^{-kp} = 2^{(1-p)k}$.

$\left(2^{(1-p)k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ jest szeregiem geometrycznym o ilorazie 2^{1-p}

$2^{1-p} < 1 \Leftrightarrow p > 1$.

Twierdzenie: Niech $p>0$. Wówczas szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$ jest zbieżny jeśli $p>1$ a rozbieżny jeśli $p \leq 1$.

Dowód: Kładziemy $a_n = \frac{1}{n(\log(n))^p}$, $2^k \cdot a_{2^k} = \frac{2^k}{2^k(\log(2^k))^p} = \frac{1}{k^p(\log 2)^p}$.

Niech $a_n \in \mathbb{R}$ $\quad b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Uwaga: $k > l$ to $b_k \leq b_l$.

Rozważmy $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n \overset{\text{oznaczamy}}{=} \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

Jeśli ciąg a_n jest zbieżny to $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Ogólnie istnieje podciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t. że

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$$

Twierdzenie: Niech $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie ciągiem liczb zespolonych. Niech $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Jeśli $\alpha < 1$ to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny

$\alpha = 1$ nie daje informacji o zbieżności $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Jeśli $\alpha > 1$ to szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny.

Dowód: Jeśli $\alpha < 1$. to $\exists\ \beta < 1$ oraz $N \in \mathbb{N}$ t. że dla $n > N$

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \beta$. Wówczas dla $n > N$ $|a_n| < \beta^n$

Szereg $\sum\limits_{n=N}^{\infty} \beta^n$ jest zbieżny jako szereg geometryczny o ilorazie $\beta < 1$.

Zatem z kryterium porównawczego szereg $\sum\limits_{n=N}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a zatem szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

$\alpha = 1$: Weźmy szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$.

dla szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\quad \alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$.

$\alpha > 1$: $\exists\ \beta > 1$ $\quad N \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{|a_n|} > \beta$ itd.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e(z)}$$

Twierdzenie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - szereg liczb zespolonych. Niech $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Jeśli $\alpha < 1$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Dowód: $\alpha < 1 \Rightarrow \exists \beta \ \exists N . \ n > N \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \beta < 1$.

Zatem $|a_{N+1}| < \beta |a_N|$, $|a_{N+2}| < \beta |a_{N+1}| < \beta^2 |a_N|$.

$\ldots$, $|a_{N+k}| < \beta^k |a_N| \Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty} a_k$ jest zbieżny. Czyli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Przykład:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad a_n = \frac{1}{n!}; \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

szereg zbieżny.

Uwaga: a_n - j.w.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Załóżmy, że $\limsup_{n\to} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \infty$ i niech $\gamma > \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

$\exists N : \ \forall n > N \ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \gamma$. Zatem $|a_{N+k}| < \gamma^k |a_N| =$

$= \gamma^{N+k} \cdot |a_N| \gamma^{-N}$

W takim razie $\sqrt[N+k]{|a_{N+k}|} < \gamma \sqrt[N+k]{|a_N| \gamma^{-N}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \gamma$.

A więc $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \gamma. \ \forall \gamma > \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

i ostatecznie $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

SZEREGI POTĘGOWE

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb zespolonych oraz $z\in\mathbb{C}$. Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, który nazywamy szeregiem potęgowym.

Twierdzenie: Rozważmy szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty}$ oraz $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i $R = \frac{1}{\alpha}$ dla $\alpha \neq 0$ oraz $R=+\infty$ dla $\alpha = 0$. dla $\alpha = +\infty$, $R=0$

Wówczas:

(i) jeśli $|z|<R$ to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest zbieżny

(ii) jeśli $|z|>R$ to szereg —"— nie jest —"—

R nazywamy promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Dowód: Kryterium Cauchy'ego w zastosowaniu do $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ daje $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ ~~a więc~~ $= |z|\cdot\alpha$.

A więc jeśli $|z|\cdot\alpha < 1$ to mamy zbieżność; $|z|<R$

jeśli $|z|\cdot\alpha > 1$ to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nie jest zbieżny.

Przykład: szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ma promień zbieżności $+\infty$. gdyż $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

a $R=+\infty$.

Okazuje się, że dla $x\in\mathbb{R}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

22.12.2015 wykład Analiza I wyk. 21

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ - promień zbieżności $R=\infty$, innymi słowy

szereg jest zbieżny dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$.

Przypomnienie $e(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$

Stwierdzenie Niech $x>0$. Wówczas $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e(x) \{= e^x = \exp(x)\}$ Notacja

Dowód: $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n^k} = \left\{ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \right\} =$

$= 1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{x^n}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$

$\leq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Przechodząc $n\to\infty$ dostajemy $e(x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Zauważmy, że $\forall n>m$ mamy nierówność

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{x^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$

Przechodząc z $n\to\infty$ przy ustalonym m

$e(x) \geq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^m}{m!} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$

Przechodząc z $m\to\infty$ dostajemy $e(x) \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$e(x+y) = e(x)\cdot e(y)$; Pytanie, czy $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \sum^{\infty} \frac{w^n}{n!}$

$u, w \in \mathbb{C}$?

Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ jest zbieżny?

~~Twierdzenie~~

Fakt Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będą ciągami zespolonymi i oznaczmy $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ i „dla wygody" $A_{-1} = 0$.
Niech $0 \leqslant p \leqslant q$. Wówczas $\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$.

Dowód: $\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q} (A_n - A_{n-1}) \cdot b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n$

$= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{p+1}^{q} A_{n-1} b_n + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$

$= \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} + A_q b_q - A_{p-1} b_p$

Kryterium Abela

Twierdzenie

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem o wyrazach zespolonych t. że

(1) $\exists M > 0 : \forall_n$ mamy $\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < M$

(2) $b_0 \geqslant b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \ldots$ {w szczególności $b_i \in \mathbb{R}$}

(3) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$, $\overset{h>0}{\exists} N$ t. że $\forall_{n>N}$ $|b_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3M}$

$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n b_n \right| = \left| \sum_{n=p}^{q-1} A_n \cdot \underbrace{(b_n - b_{k+1})}_{\geqslant 0} + A_q \underset{\geqslant 0}{b_q} - A_{p-1} \underset{\geqslant 0}{b_p} \right| = (*)$

jeśli $p > N$

Ponieważ $b_n - b_{n+1} > 0$ to oczywiście

$(*) \leqslant M \left| \sum_{n=p}^{q-1} (b_n - b_{n+1}) + b_q + b_p \right| = 2 \cdot M \cdot b_p \leqslant \varepsilon.$

Twierdzenie (Kryterium Dirichleta)

Niech $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $c_n \in \mathbb{R}$ t. że

(1) $c_{2n} \geq 0$, $c_{2n+1} \leq 0$

(2) $|c_0| \geq |c_1| \geq |c_2| \dots$

(3) $\lim c_n = 0$

Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny

Dowód:

Weźmy $b_n = |c_n|$, $a_n = (-1)^{n+1}$.

Wówczas b_n jest malejący i zbiega do zera oraz $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq 1$. i korzystając z kryterium Abela mamy zbieżność $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

zastosowanie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ jest szeregiem zbieżnym dla $\forall_{\alpha>0}$.

W szczególności zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Definicja: Mówimy, że szereg zespolony [illegible] $\sum_{n=0}^{\infty}$ jest bezwzględnie zbieżny jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Przykład: $\sum_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Lemat: Szereg [illegible] $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bezwzględnie zbieżny jest zbieżny

$\varepsilon > 0$ $\left|\sum_{n=p}^{q} a_n\right| \leq \sum_{n=p}^{q} |a_n| < \varepsilon$ dla dostatecznie dużych p i q;

a więc szereg $\sum a_n$ jest zbieżny.

Zauważmy, że $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne do A, B - odpowiednio, to $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)$ jest zbieżny do $A+B$.

Iloczyn szeregów

Iloczyn szeregów

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą szeregami zespolonymi.
Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nazywamy iloczynem szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Przykład:

Weźmy $\sum_{0}^{\infty} a_n = \sum_{0}^{\infty} b_n = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ – zbieżny na mocy Kryterium Dirichlet

Iloczyn szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$:

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+1-k}\sqrt{k+1}} \qquad |c_n| \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\frac{n}{2}+1} = \frac{n+1}{\frac{n}{2}+1} \xrightarrow{n\to\infty} 2$$

Wyrazy szeregu c_n nie są zbieżne do zera:

$$(n+1-k)(k+1) = \left(\frac{n}{2}+1\right)^2 - \left(\frac{n}{2}-k\right)^2 \leqslant \left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

W szczególności szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ nie zbieżny.

Udowodnimy dalej, że jeśli szereg $\sum a_n$ jest bezwzględnie zbieżny a szereg $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny to iloczyn $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny

Uwaga: szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest bezwzględnie zbieżny jeśli $|z| < R$ gdzie R jest promieniem zbieżności $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} u^k w^{n-k} = \frac{1}{n!}(u+w)^n$$

Wykład Analiza I 12.01.2016

Szereg potęgowy $e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$e(u+w) = e(u) \cdot e(w)$. $\leftarrow$ (*)

Dowodząc (*) korzystaliśmy z następującego twierdzenia:

Twierdzenie: Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem bezwzględnie zbieżny (tzn. szereg $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny), $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.
Niech $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będzie szeregiem zbieżnym. Wówczas iloczyn tych szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ gdzie $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$

Dowód:

Notacja: $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$, $\beta_n = B_n - B$

$$C_n = \overset{c_0}{a_0b_0} + \overset{c_1}{(a_1b_0 + a_0b_1)} + \dots + \overset{c_n}{(a_0b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)} =$$

$$= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 =$$

$$= a_0(\beta_n + B) + a_1(\beta_{n-1} + B) + \dots + a_n(\beta_0 + B)$$

$$= A_n B + \underbrace{a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \dots + a_n\beta_0}$$

dalej udowodnimy, że $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \dots + a_n\beta_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Zauważmy, że $\beta_n = B_n - B \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Zatem $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t. że dla $n > N$ mamy $|\beta_n| < \varepsilon$.

Skoro $\gamma_n = \beta_0 a_n + \beta_1 a_{n-1} + \dots + \beta_N a_{n-N} + a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + \overset{a_{n-N-1}\beta_{N+1}}{\cancel{a_N \beta_{n-N}}}$

to $|\gamma_n| \leq |\beta_0 a_n + \beta_1 a_{n-1} + \dots + \beta_N a_{n-N}| + \sum_{k=0}^{n-N-1} |a_k||\beta_{n-k}|$.

Zauważmy, że $\sum_{k=0}^{n-N-1} |a_k| \cdot |\beta_{n-k}| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot \varepsilon$

Wykorzystamy to, że $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ~~Ewentualnie zwiększając N~~, to zauważmy, że dla $n \to \infty$ mamy $|\beta_0 a_n + \beta_1 a_{n-1} + \ldots + \beta_N a_{n-N}| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Czyli $\exists\ N'$ t. że dla $n > N'$

$|\beta_0 a_n + \beta_1 a_{n-1} + \ldots + \beta_N a_{n-N}| < \varepsilon$.

Biorąc $N'' = \max\{N', N\}$ mamy $|r_n| \leq \varepsilon \cdot (1 + \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|)$ dla $n > N''$.

Konkluzja $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$ oraz $C_n \longrightarrow A \cdot B$.

$\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ jest zbieżny do $A \cdot B$.

Przestawianie kolejności wyrazów szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Definicja

Niech $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że każda liczba naturalna pojawia się w ciągu $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dokładnie raz. Mając szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ gdzie $a_n' = a_{k_n}$. Mówimy, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ powstaje z $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ przez przestawienie kolejności jego wyrazów.

Przykład:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{7}}_{<0} \ldots \text{itd.}$$

Oznaczając $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mamy $s < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

Rozważmy szereg powstający przez przestawienie kolejności:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

$S_n' = \sum_{k=1}^{n} a_k'$; Skoro $\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} > 0$. $S_3' < S_6' < S_9' < \ldots$ itd

Ponadto $s_3' = \frac{5}{6}$, zatem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ jest zbieżny to $s' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n' > \frac{5}{6}$ i $s' > s$.

$\boxed{\text{Uwaga}}$: Riemann pokazał, że $\forall x \in \mathbb{R}$ istnieje takie przestawienie szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = x$.

Kwestia zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$.

$$\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} = \left\{ M = (4k-3)(4k-1)\cdot 2k \right\} =$$

$$= \frac{(4k-1)2k + (4k-3)2k - (4k-3)(4k-1)}{M} = \frac{8k-3}{M} \sim \frac{1}{k^2}$$

Stosujemy kryterium Cauchy'ego: ~~dostajemy~~ $k > n$ $l = 0, 1, 2$, $m = 0, 1, 2$:

$$\left| S'_{3k+l} - S'_{3n+m} \right| = \left| \sum_{i=n+1}^{k} \left(\frac{1}{4i-3} + \frac{1}{4i-1} - \frac{1}{2i} \right) \right| < \varepsilon \text{ dla dost. dużych } k \text{ oraz } n$$

$+$ co najwyżej sześć wyrazów rzędu $\frac{1}{k}$ lub $\frac{1}{n}$. $< \varepsilon$

dla dostatecznie dużych k i n.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$: Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie szeregiem zbieżnym oraz $\sum_{n=1}^{\infty} = A$. Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ powstaje przez zamianę kolejności wyrazów szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} a_n' = A$.

$\boxed{\text{Dowód}}$: Niech $\varepsilon > 0$. $\exists N$: $n, m > N$ i $n > m$ mamy $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$. $\longrightarrow$ w szczeg.: $\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon$

$\exists l \in \mathbb{N}$ t. że $\{1, 2, \dots, N\} \subset \{k_1, k_2, \dots, k_l\}$ gdzie $\{k_i\}$ - ciąg l. naturalnych t. że $a_n' = a_{k_n}$.

S_n - sumy częściowe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

S_n' - sumy częściowe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n'}$.

Wówczas dla $n > L$ mamy

$|S_n' - S_n| < \varepsilon$ gdyż wyrazy o indeksach $\leq N$ skrócą się i zostaje suma niektórych wyrazów o indeksach $> N$.

$\boxed{\text{Wykład Analiza I} \quad 13.01.2016}$

Ciągi i szeregi funkcyjne

Przykład

① $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$

ciąg funkcji rzeczywistych

② szereg funkcyjny $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ gdzie $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$

Definicja Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji określonych na zbiorze X o wartościach w $\mathbb{C}$, czyli $f_n : X \to \mathbb{C}$.

Mówimy, że:

- ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo do funkcji $f : X \to \mathbb{C}$ jeśli $\forall x\in X \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

- ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do funkcji $f : X \to \mathbb{C}$ jeśli $\sup_{x\in X} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Niech X będzie przestrzenią metryczną
- ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest niemal jednostajnie zbieżny do $f: X \to \mathbb{C}$, jeśli dla każdego zwartego podzbioru $K \subset X$ mamy
$$\sup_{x\in K} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Definicja: Niech $(f_n)_n$ będzie ciągiem funkcyjnym. Rozważmy ciąg funkcyjny $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gdzie $g_n = \sum_{k=1}^{n} f_n$

Ciąg $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy szeregiem funkcyjnym i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Przykład

1. $\left(\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny do 0.

gdyż $\forall_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \iff \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ jest zbieżny punktowo do $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \cancel{\frac{x^2}{1-\frac{1}{1+x^2}}} \; 1+x^2 & x \neq 0 \end{cases}$$

szereg geometryczny o ilorazie $q = \frac{1}{1+x^2}$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Zauważmy, że $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nie jest ciągła w zerze, mimo, że $f_n(x)$ są ciągłe to f nie. Okazuje się, że szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ nie jest jednostajnie zbieżny.

(następne twierdzenie wyjaśnia dlaczego).

Twierdzenie: Niech X będzie przestrzenią metryczną oraz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych z X w $\mathbb{C}$ zbieżnych jednostajnie do funkcji $f: X \to \mathbb{C}$. Wówczas f jest funkcją ciągłą.

Dowód:

Niech $x, y \in X$ oraz $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|$$

Z jednostajnej zbieżności $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{jedn.}} f \Rightarrow \exists N\ \forall n > N\ \forall s \in X\ |f(s) - f_n(s)| < \frac{\varepsilon}{3}$

Wybieramy n dostatecznie duże. Wtedy $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

$|f(y) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Ciągłość funkcji f_n gwarantuje istnienie $\delta > 0$:

jeśli $|x - y| < \delta$ to $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$,

a więc dla takiej δ i n j.w. mamy $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ∎

Wniosek: Jednostajna zbieżność $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ daje równość:

$$\lim_{s\to t} \lim_{n\to\infty} f_n(s) = \lim_{n\to\infty} \lim_{s\to t} f_n(s).$$

Pytanie: Niech $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Co należy założyć o zbieżności $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$, żeby dostać różniczkowalność f oraz $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} (f_n')$.

$$f_n = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{jedn.}} 0$$

$$f_n' = \sqrt{n}\cos(nx) \quad \text{w szczególności} \quad f_n'(0) = \sqrt{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty.$$

Twierdzenie: Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na odcinku $]a,b[$ i różniczkowalnych na $]a,b[$. Przypuśćmy, że f_n jest zbieżny punktowo do funkcji $f:]a,b[\to \mathbb{R}$, oraz ciąg pochodnych $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny niemal jednostajnie do funkcji $g:]a,b[\to \mathbb{R}$. Ponadto załóżmy, że funkcje f_n' są ciągłe.
Wówczas $f:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $f' = g$.

Dowód:
Chcemy pokazać, że $\forall_{x\in]a,b[}$ funkcja f jest różniczk. w x oraz $f'(x) = g(x)$. Zmniejszając $]a,b[$ tak, aby zawierał x i był zwarty możemy założyć, że (f_n') zbiega do g jednostajnie.
Twierdzenie o wartości średniej $\Rightarrow \exists\, \theta \in]0,1[$ t. że

$$\frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) = f_n'(x+\theta h) - g(x).$$

Jednostajna zbieżność f_n' do $g \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ n \geq N$ to
$(*)\ |f'_n(t) - g(t)| < \varepsilon$. dla $\forall t$ należących do wnętrza ustalonego odcinka zwartego, zawierającego x.
Funkcja g będąca granicą niemal jednostajnie ciągłą (f_n') jest ciągła. Zatem $\exists\, \delta$ t. że jeśli $|t-x| < \delta$ to
$(**)\ |g(t) - g(x)| < \varepsilon$. Dalej:

$$|f_n'(x+\theta h) - g(x)| \leq \underbrace{|f_n'(x+\theta h) - g(x+\theta h)|}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}\ (*)} + \underbrace{|g(x+\theta h) - g(x)|}_{\overset{\wedge}{\varepsilon}\ (**)}$$

tak jest dla wszystkich $n > N$

Zatem $\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - g(x) \right| \leq 2\varepsilon.$

Skoro tak jest $\forall \varepsilon>0$ (tzn $\forall \varepsilon>0 \; \exists \delta : |h|<\delta$ to

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - g(x) \right| < \varepsilon \Big) \text{ to } \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = g(x)$$

czyli funkcja f jest różniczkowalna oraz $f'(x) = g(x)$ ∎

Wykład Analiza I 19.01.2016

Ciągi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i szeregi $\sum_{n=0} f_n$ funkcyjne gdzie $f_n: X \longrightarrow \mathbb{C}$ gdzie X - p-ń metryczne.

Twierdzenie: Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji całkowalnych ~~określonych~~ na odcinku $[a,b]$ o wartościach rzeczywistych $f_n: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że ciąg f_n ~~zbieżny~~ zbiega jednostajnie do funkcji całkowalnej $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Wówczas

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Uwaga: jeśli f_n są funkcjami ciągłymi to funkcja f jest ciągła, więc całkowalna i mamy jedno założenie mniej.

Dowód:
$$\left| \int_a^b f(x) - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b (f-f_n)(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |(f-f_n)(x)|\,dx$$
$$\leq \underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |(f-f_n)(x)|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \, |a-b|$$

$\leftarrow$ bo $f_n \to f$ jednostajnie

(Kryterium Weierstrassa)

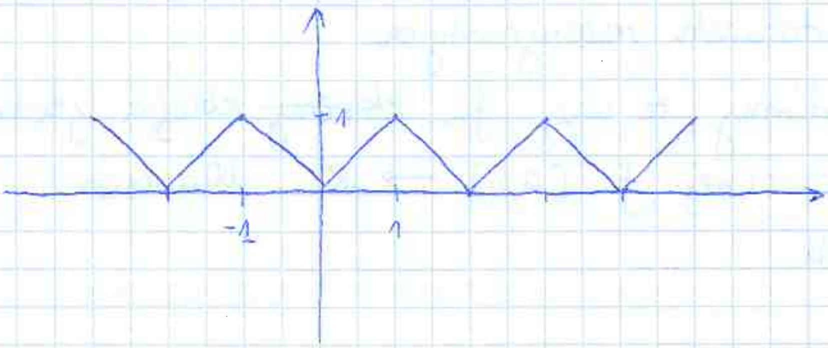
Twierdzenie: Niech $\sum_{n=0} f_n$ będzie szeregiem funkcji $f_n: X \longrightarrow \mathbb{C}$ na X i przypuśćmy, że szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest zbieżny oraz spełniona jest nierówność $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq b_n$. Wówczas $\sum_{n=0} f_n$ jest jednostajnie zbieżny.

Dowód: Granica punktowa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ istnieje gdyż $|f_n(x)| \leq b_n$.

Dalej $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

a zatem $\sup_{x\in X} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ czyli mamy zbieżność jednostajną.

Przykład: Funkcja ciągła na $\mathbb{R}$ nieróżniczkowalna w żadnym punkcie. Niech $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t. że dla $x \in [-1, 1]$ $\varphi(x) = |x|$ oraz $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ \varphi(x+2) = \varphi(x)$.



Funkcja φ jest ciągła. Rozważmy szereg funkcyjny
$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$.

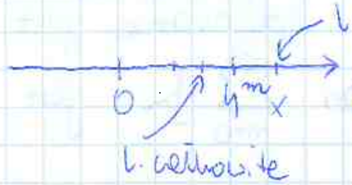
Skoro $\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)\right| \leq \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n}_{b_n}$ i funkcja $f_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ są ciągłe to

① Szereg $\sum f_n$ jest zbieżny jednostajnie (kryt. Weierstr.)

② granica $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ jest funkcją ciągłą.

Funkcja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$ nie jest różniczkowalna dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

Rozważmy przyrosty $\delta_m = \pm \frac{1}{2} 4^{-m}$ gdzie znak $\pm$ wybieramy w taki sposób, aby między $4^m x$ a $4^m(x + \delta_m)$ nie było liczby całkowitej.



a wtedy +.

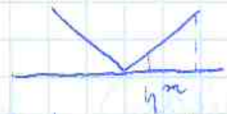
Dalej przeanalizujmy ilorazy różnicowe:

$$\gamma_m = \frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \overbrace{\frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}}^{\text{ozn. } \gamma_n}$$

Własności γ_m

i) $|\gamma_n| = 0$ dla $n > m$, gdyż $4^n \cdot \delta_m = 4^n \cdot (\pm \frac{1}{2}) \cdot 4^{-m}$ jest liczbą parzystą a funkcja φ jest okresowa o okresie 2. czyli $\varphi(4^n x + 4^n \delta_m) - \varphi(4^n x) = 0$.

ii) dla $n = m$: $|\gamma_m| = 4^m$.



gdyż wówczas $\left| \frac{\varphi(4^m(x+\delta_m)) - \varphi(4^m x)}{\delta_m} \right| = \left| \frac{4^m(x+\delta_m) - 4^m x}{\delta_m} \right| = 4^m$

iii) dla $n < m$ $|\gamma_n| = 4^n$, gdyż wówczas

$$\left| \frac{\varphi(4^n(x+\delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m} \right| = \frac{4^n(x+\delta_m) - 4^n x}{\delta_m} = 4^n.$$

Szacowanie ilorazu różnicowego:

$$\left| \frac{f(x+\delta_m) - f(x)}{\delta_m} \right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| \overset{i)}{=} \left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \gamma_n \right| \overset{?\ ii)}{\geq}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 4^m - \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n 4^n = 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = 3^m - \frac{3^m - 1}{3-1} =$$

$$= 3^m - \frac{3^m \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}(3^m + 1) \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty.$$

(?) Wiemy, że $\gamma_n = \pm 4^n$ dla $n \leq m$ { patrz ii), iii) }

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{3}{4}\right)^n \gamma_n \right| = \left| \sum_{n=0}^{m} \pm 3^n \right| = 3^m \left| \sum_{n=0}^{m-1} \pm 3^{n-m} \pm 1 \right|,$$

ponieważ $n < m$ to $3^{n-m} < 1$ oraz $3^m \left| \sum_{n=0}^{m-1} \pm 3^{n-m} \pm 1 \right|$
$\geq 3^m \left(1 - \sum_{n=0}^{m-1} 3^{n-m}\right) = 3^m - \sum_{n=0}^{m-1} 3^n$.

co kończy przykład.

Szeregi potęgowe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z)$. Promień zbieżności r, gdzie $\frac{1}{r} = \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ $f: K(0,r) \to \mathbb{C}$ $K(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$

W szczególności można obciąć funkcję f do $]-r, r[$
czyli $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Pytanie: Czy (kiedy) funkcja $f|_{]-r,r[}$ jest różniczkowalna?
~~Udowodnimy~~ Oznaczenie $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Udowodnimy, że g jest różniczkowalna na $]-r, r[$ oraz $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$:

Przykład: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ dla $x \in \mathbb{R}$ => $\exp(x)$ jest różniczkowalna oraz $\exp(x)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' =$
$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(x)$.

Uwaga: Jak się ma promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ do promienia zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$?

$|n a_n|^{\frac{1}{n-1}} = n^{\frac{1}{n-1}} \cdot |a_n|^{\frac{1}{n-1}}$. Skoro $n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ to również $n^{\frac{1}{n-1}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$. Ponadto $\limsup |a_n|^{\frac{1}{n-1}} =$
$= \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ i widzimy, że $\limsup_{n \to \infty} |n \cdot a_n|^{\frac{1}{n-1}} =$
$= \limsup_{n \to \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = r$

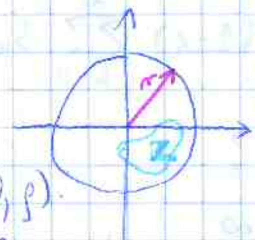
Wykład Analiza I 20.01.2016

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \log 2$$

Twierdzenie:

Niech $r > 0$ będzie promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Wówczas szereg ten jest niemal jednostajnie zbieżny na swoim kole zbieżności $K(0,r)$.

$\boxed{\text{Dowód}}$: Niech Z będzie zbiorem zwartym zawartym w $K(0,r)$.



Niech $0 < \rho < r$ t. że $Z \subset K(0,\rho)$.

Skoro szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n$ jest zbieżny, to na mocy kryterium Weierstrassa szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest jednostajnie zbieżny na $K(0,\rho)$ gdyż biorąc $f_n = a_n z^n$ oraz $b_n = |a_n| \rho^n$ mamy $|f_n| \leq b_n$ dla $z \in K(0,\rho)$, w szczególności dla $z \in Z$.

$\blacksquare$

$\boxed{\text{Wniosek}}$: Jeśli promień zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ jest $r > 0$ to jest zbieżny niemal jednostajnie na $K(0,r)$. Ponadto szereg $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ też jest zbieżny na $K(0,r)$. W szczególności funkcja $]-r,r[\ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}$ jest różniczkowalna oraz $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

Nie ma gwarancji, że szereg (liczbowy) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ jest zbieżny.

$\boxed{\text{Twierdzenie}}$ **(Abela)**

Niech $r > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Przypuśćmy, że szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ jest zbieżny. Wówczas funkcja $f: [0,r] \ni x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}$ jest ciągła.

$\boxed{\text{Dowód}}$: Załóżmy na początku, że $r=1$ (bez straty ogólności).

Dla $x \neq 1$ f jest ciągła. Badamy granicę $x \longrightarrow 1^-$. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

Oznaczmy $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ oraz $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, $S_{-1} = 0$.

~~Dla $x<1$~~

Obserwacja: $\cancel{f(x)}$ $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1}) \cdot x^k = \sum_{k=0}^{n} S_k x^k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^{k+1} =$

$= (1-x) \sum_{k=0}^{n-1} S_k x^k + S_n x^n.$

Biorąc granicę $n \longrightarrow \infty$ i zakładając, że $x<1$

dostajemy $f(x) = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k.$

Czy $\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$?

$$|f(x) - S| = \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k - S \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ponieważ} \\ \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \\ \text{to } S = (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} x^k \cdot S \end{array} \right\} =$$

$$= \left| (1-x) \sum_{k=0}^{\infty} (S_k - S) x^k \right| = \left| (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{N} (S_k - S) x^k \right| + \left| (1+x) \sum_{k=N+1}^{\infty} (S_k - S) x^k \right|$$

$\left\{ \text{Skoro } S_k \xrightarrow[k\to\infty]{} S \text{ to } \forall \varepsilon>0 \ \exists N: \ n \geqslant N \ |S_n - S| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right\}$

$$\leqslant (1-x) \left| \sum_{k=0}^{N} (S_k - S) x^k \right| + \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=N+1}^{\infty} x^k \leqslant \varepsilon$$

$$\leqslant (1-x) \left| \sum_{k=0}^{N} (S_k - S) x^k \right| + \frac{\varepsilon}{2}$$

Ponieważ funkcja $[0,1] \ni x \longmapsto \left| \sum_{k=0}^{N} (S_k - S) x^k \right|$ jest ograniczona na odcinku $[0,1]$ to $\exists \delta > 0$: $x \in [1-\delta, 1]$ wyrażenie $(1-x) \left| \sum_{k=0}^{N} (S_k - S) x^k \right|$ jest mniejsze niż $\frac{\varepsilon}{2}$.

Podsumowując: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : x \in [1-\delta, 1]$ to $|f(x) - S| < \varepsilon$.

Innymi słowy $\lim_{x\to 1^-} f(x) = S$ czyli f jest funkcją ciągłą.

Jeśli $r \neq 1$ to zamiast szeregu $\sum a_n z^n$ rozważamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n z^n$, którego promień zbieżności jest równy 1. ∎

Funkcje elementarne

Przypomnienie $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; $\exp(u+v) = \exp(u) \cdot \exp(v)$.
Promień zbieżności $r = +\infty$. Zauważmy, że $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$.
W szczególności dla $t \in \mathbb{R}$ mamy $\overline{\exp(it)} = \exp(-it) = \exp(it)^{-1}$,

Zatem $|\exp(it)|^2 = \overline{\exp(it)} \cdot \exp(it) = 1$.
Funkcje cos i sin definiujemy wzorem $\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$
czyli $\cos(z): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

$\sin(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$ czyli $\sin(z): \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

W szczególności dla $z \in \mathbb{R}$ mamy:

$\cos(t) = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2} = \mathrm{Re}(\exp(it))$

$\sin(t) = \quad \dots \quad = \mathrm{Im}(\exp(it))$

$\Rightarrow \exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$

Łatwo sprawdzić tożsamości (z liceum)

$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$

$\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \sin(t)\cos(s)$

$\exp i(s+t) = \cos(s+t) + i\sin(s+t)$

$\exp(is) + \exp(it) = (\cos(s) + i\sin(s))(\cos(t) + i\sin(t)) =$

$= \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t) + i(\cos(s)\sin(t) + \sin(s)\cos(t))$

$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 = |\exp(it)|^2$

Szeregi potęgowe:

$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ich promień zbieżności jest $+\infty$.

Różniczkowanie "wyraz po wyrazie" $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jest legalne oraz $\sin'(x) = \cos(x)$ podobnie $\cos'(x) = \sin(x)$.

$\boxed{\text{Liczba } \pi}$

(i) $\cos(0) = 1$

(ii) $\cos(2) = 1 - 2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!} < 0.$

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^n}{(2n)!}$ jest naprzemienny, jego pierwszy wyraz jest równy $\frac{2}{3}$. Oraz ciąg $\frac{4^n}{(2n)!}$ jest malejący dla $n \geq 2$.

W szczególności $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{n}}{(2n)!}$ jest liczbą dodatnią $< \frac{2}{3}$.

W szczególności $\cos(2) < 1 - 2 + \frac{2}{3} < -\frac{1}{3}$.

Istnieje liczba rzeczywista ~~mię dzy~~ $x_0 \in [0, 2]$ t. że $\cos(x_0) = 0$.

gdyż $\cos(0) = 1$, $\cos(2) < 0$ oraz $\cos$ jest f. ciągłą.

~~Najmniejsze~~

Definicja: Liczba $\pi \in \mathbb{R}$ jest to liczba taka że $\frac{\pi}{2}$ jest najmniejszą liczbą rzeczywistą dodatnią zerującą funkcję $\cos$.

Definicja 46

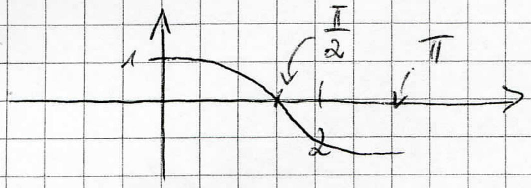
- Liczba $\pi \in \mathbb{R}$ jest to liczba taka, że $\frac{\pi}{2}$ jest najmniejszą liczbą dodatnią zerującą funkcję cos.

ykład nr. 25 26.01.16

Przypomnienie: $\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$;

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

iczba π: udowodniliśmy, że między 0, a 2 istnieje liczba x_0, t. że $\cos(x_0) = 0$. Liczbę π definiujemy, jako najmniejszą liczbę dodatnią t. że $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.



Pytanie czy cos na odcinku $[0,2]$ jest malejący? Badamy $\cos'(x)$.

$$\cos'(x) = -\sin(x), \text{ a } \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

auważmy, że $x - \frac{x^3}{6} = x\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) \geq 0$ na odcinku $[0,2]$

auważmy ponadto, że szereg naprzemienny $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

a następujące własności: jego pierwszy wyraz jest większy od zera, po drugie dla $x \in [0,2]$ ciąg $\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ jest malejący $n \geq 2$

$$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n+3)!}{x^{2n+3}} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{x^2} \overset{n \geq 2}{>} 1 \Longrightarrow \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} >$$

$$> \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

- Wnioskujemy, że $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \geq 0$ dla $x \in [0,2]$, a zatem

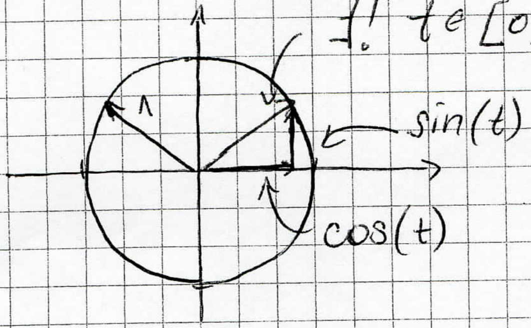
$\sin(x) \geq 0$ dla $x \in [0,2]$ oraz cos maleje na $[0,2]$.

Skoro $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ oraz $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$; skoro $\sin(\frac{\pi}{2}) > 0$ to $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. W szczególności $e^{\frac{i\pi}{2}} = \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + i\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} = i$

oraz $e^{i\pi} = (e^{\frac{i\pi}{2}})^2 = i^2 = -1$.

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0} \quad \text{wzór Eulera}$$

$\exists! \; t \in [0, 2\pi[\quad e^{it}$???



Krok 1.

Jeśli $t \in]0, 2\pi[$ to $e^{it} \neq 1$.

Przypuśćmy na odwrót, że $e^{it} = 1$. Niech $\tau \in]0, \frac{\pi}{2}[$ t. że $t = 4\tau$. Niech $e^{i\tau} = a + ib$ gdzie $a, b \geq 0$.

$$e^{it} = (e^{i\tau})^4 = (a+ib)^4 = a^4 - 6a^2b^2 + b^4 + 4iab(a^2 - b^2) = 1.$$

sprzeczność

W szczególności $a^2 = b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow e^{it} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{6}{4} = -1$

Krok 2.

Jeśli zatem $e^{it_1} = e^{it_2}$ oraz $t_1, t_2 \in]0, 2\pi[$ i np. $t_1 > t_2$ to $e^{i(t_1 - t_2)} = 1$ ponieważ $t_1 - t_2 \in]0, 2\pi[$ to dostajemy sprzeczność z krokiem 1 i mamy jednoznaczność.

Krok 3.

$\forall_{z\in\mathbb{C}}\ |z|=1.\ \exists t\in[0,2\pi[$ t. że $z=e^{it}$, gdyż dla $t\in[0,\pi]$ $\cos(t)$ przyjmuje wszystkie wartości z zakresu od -1 do 1.

Ponadto, skoro $e^{i\pi}=-1$ to mamy tożsamość

$$e^{i(\pi+t)}e^{i(\pi-t)}=e^{2i\pi}=1.$$

czyli $e^{i(\pi+t)}$ jest liczbą sprzężoną do $e^{i(\pi-t)}$

Powyższe pokazuje, że zachodzi $(*)$

$e^{i\pi}=-1 \Rightarrow e^{2i\pi}=(e^{i\pi})^2=1$, a więc exp jest periodyczna.

$e^{z+2k\pi i}=e^{z}$ dla każdego $k\in\mathbb{Z}$. W szczególności funkcje $\cos,\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są periodyczne o okresie 2π.

$$\cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha\ ;\ \sin(\beta+2\pi l)=\sin\beta$$

$\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\quad \forall_{k,l\in\mathbb{Z}}$

Zerowanie funkcji trygonometrycznych:

$$\sin(z)=0 \Leftrightarrow e^{iz}-e^{-iz}=0 \Leftrightarrow e^{2iz}=1 \Leftrightarrow 2z=2k\pi$$

$k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow z\in\mathbb{Z}\cdot\pi.$

Podobnie $\cos(z)=0 \Leftrightarrow z\in\frac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\cdot\pi$

Funkcje tg oraz arctg

$$tg:\mathbb{C}\setminus\{\tfrac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{C}\qquad tg(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

$$tg:]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow\mathbb{R}\qquad tg(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$$

Zauważmy, że $\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} tg(t)=+\infty \quad \lim_{t\to-\frac{\pi}{2}^+} tg(t)=-\infty.$

Ponadto $tg'(t)=\frac{1}{\cos^2(t)}>0$ i tg jako funkcja rosnąca jest bijekcją $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ i $\mathbb{R}$

W szczególności funkcja odwrotna $\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Pochodna arctg:

$$x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(x)) \rightsquigarrow 1 = \operatorname{arctg}'(\operatorname{tg}(x)) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)} =$$

$$= \operatorname{arctg}'(\operatorname{tg}(x))(1 + \operatorname{tg}^2(x)).$$

Kładąc $t = \operatorname{tg}(x) \Rightarrow \operatorname{arctg}'(t) = \frac{1}{1+t^2}$

Zauważmy, że $\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \quad |t| < 1$

$$\operatorname{arctg}(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int_0^t \sum_0^{\infty} (-1)^n t^{2n}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} t^{2n+1}$$

dla $|t| < 1$.

<u>Twierdzenie Abela</u> (*)

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1) = \lim_{t \to 1^+} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} t^{2n+1} \overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

Przykład

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = + \log 2$$

$$\frac{d}{dt} \log(1+t) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \text{dla} \quad |x| < 1$$

niemal jednostajnie zbieżny

$$\log(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t (-1)^n x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1} \quad |t| < 1$$

dla $t=1$ ~~dla~~ na mocy twierdzenia Abela dostajemy

$\boxed{\log(2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}}$ innymi słowy

$$2 = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}} = \prod_{n=0}^{\infty} e^{\frac{(-1)^n}{n+1}}$$

Wykład nr. 26 — 27.01.16

Kryterium całkowe zbieżności szeregu.

Przypomnienie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ - szereg zbieżny

Ogólniej: szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ jest zbieżny $\iff p>1$.

Rozważmy całkę
$$\lim_{N\to\infty} \int_0^N \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{1-p}\, x^{1-p}\Big|_1^N & p \neq 1 \\ \lim_{N\to\infty} \log x \Big|_1^N & p = 1 \end{cases}$$

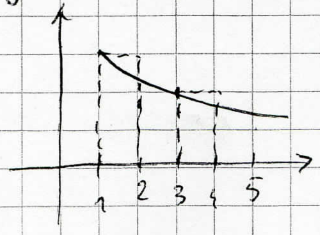
dla $p>1$ mamy $\lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = \frac{1}{p-1}$,

a dla $p \leq 1$ $\lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{1}{x^p}\,dx = +\infty$

Twierdzenie 89 (kryterium całkowe)

Niech dana będzie funkcja $f: [1,\infty[\to \mathbb{R}_{\geq 0}$ całkowalna na każdym przedziale $[1,N[$ nierosnąca. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica $\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)\,dx$.

rys.



- idea dowodu

Dowód

$$\int_1^N f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx + \ldots + \int_{N-1}^N f(x)\,dx.$$

Szacowanie:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k) \quad \text{(długość podstawy 1)}$$

sumujemy po $k \in \{1,2,\ldots,N-1\}$

$$\sum_{k=2}^{N} f(k) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{N-1} f(k)$$

Czyli, jeśli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ jest zbieżny to ciąg sum częściowych $\sum_{k=1}^{N-1} f(k)$ jest ograniczony, a więc ciąg (rosnący) $\left(\int_1^N f(x)\,dx\right)_{N\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony, a więc zbieżny.

W drugą stronę, jeśli ciąg $\left(\int_1^N f(x)\,dx\right)_{N\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny to jest on ograniczony, a zatem sumy częściowe

$$\sum_{k=1}^{N} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{N} f(k) \leq f(1) + \int_1^N f(x)\,dx$$ i tworzą

ciąg ograniczony. Ponieważ $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ jest szeregiem o wyrazach dodatnich, to jego ograniczoność implikuje zbieżność $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ $\blacksquare$

Twierdzenie 90. (Weierstrass'a)

$$C([a,b]) = \{f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad f\text{ - ciągła}\}$$

$\mathbb{C}_n[\cdot]$ - wielomiany stopnia n o współczynnikach zespolonych

$$w(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{C}_n[\cdot] \subset C([a,b])$$

ech $f \in C([a,b])$. Wówczas istnieje ciąg wielomianów $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, który jest zbieżny do f jednostajnie:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - w_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>owód</u>

wierdzenie Weierstrassa wystarczy udowodnić dla $[a,b]=[0,1]$ oraz funkcji $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ t. że $f(0)=f(1)=0$.

Rozważmy odwzorowanie $\psi:[a,b]\longrightarrow[0,1]$, gdzie

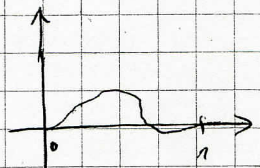
$$\psi(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ - bijekcja } \quad \psi^{-1}:[0,1]\longrightarrow[a,b].$$

) szczególności, jeśli $f:[a,b]$ to $\tilde f = f\circ\psi^{-1}:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$

alej: $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ to $\tilde{\tilde f}(x) = f(x) - f(0) - x\cdot(f(1)-f(0))$

$$\tilde{\tilde f}(1) = 0 = \tilde{\tilde f}(0).$$

ech zatem $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}$ $f(0)=0=f(1)$



Funkcję f przedłużamy do $\mathbb{R}$ kładąc zero poza $[0,1]$.

tedy $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ jest <u>jednostajnie ciągła</u>

ozważmy ciąg wielomianów $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, gdzie $_n\in\mathbb{R}_{>0}$ t. że $\int_{-1}^{1} Q_n(x) = 1$, czyli $c_n = \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n\right)^{-1}$.

acowanie z nierówności Bernoulliego:

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt n}}(1-x^2)^n dx \geq 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt n}}(1-nx^2)\,dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{\sqrt n} - \left(\frac13\right)^n\cdot\frac{1}{n^{\frac32}}\right) = \frac{4}{3\sqrt n}$$

W szczególności dla $1 \geq |x| \geq \delta$ ciąg wielomianów $Q_n(x)$ dąży jednostajnie do zera. Rzeczywiście:

$$Q_n(x) \leq \frac{3\sqrt{n}}{4}(1-\delta^2)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ jednostajnie na } [-1,-\delta] \cup [\delta, 1].$$

Wielomiany w_n definiujemy wzorem

$$w_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+y)\cdot Q_n(y)\,dy$$

① w_n jest ciągiem wielomianów.

Skoro f jest równa 0 poza $[0,1]$ to

$$\int_{-1}^{1} f(x+y)\,Q_n(y)\,dy = \int_{-x}^{1-x} f(x+y)\,Q_n(y)\,dy = \left\{\begin{matrix} x+y=u \\ u\in[0,1] \end{matrix}\right\} =$$

$$= \int_{0}^{1} f(u)\,Q_n(u-x)\,du = \qquad Q_n(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_{2n} y^{2n}$$

$$= \int_{0}^{1} f(u)\left(a_0 + a_1(u-x) + \ldots + a_{2n}(u-x)^{2n}\right) du \text{ - po}$$

wycałkowaniu zmiennej dostaniemy wielomian zmiennej x stopnia $2n$.

② w_n dąży do f jednostajnie na $[0,1]$.

f - jednostajnie ciągła to $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}$ t. że jeśli $|y|<\delta$ to $|f(x+y)-f(x)|<\varepsilon$

gdyż $\int_{-1}^{1} Q_n(y)\,dy = 1$

$$|f(x)-w_n(x)| = \left| f(x) - \int_{-1}^{1} f(x+y)\,Q_n(y)\,dy \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - f(x+y))\,Q_n(y)\,dy \right| \leq \int_{-1}^{1} |f(x+y)-f(x)|\,Q_n(y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{-\delta} |f(x+y) - f(\overset{x}{\cancel{y}})|\, Q_n(y)\, dy + \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+y) - f(\overset{x}{\cancel{y}})|\, Q_n(y)\, dy \; +$$

$$+ \int_{\delta}^{1} |f(x+y) - f(\overset{x}{\cancel{y}})|\, Q_n(y) \le 2 \sup_{x\in[0,1]} |f| \left(\int_{-1}^{-\delta} Q_n(y)\, dy + \int_{\delta}^{1} Q_n(y)\, dy \right) +$$

gdyż dla $\delta \le |x| \le 1$

$$+ \; \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(y)\, dy$$

patrz początek rozumowania ②

$|f(x+y) - f(x)|$ szacujemy przez $2 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$

$$\underbrace{\int_{-1}^{1} Q_n(y)\, dy}_{=1} \geq \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(y)\, dy$$

$$\le 2 \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \cdot \left(\int_{-1}^{-\delta} Q_n(y)\, dy + \int_{\delta}^{1} Q_n(y)\, dy \right) + \varepsilon \cdot 1 \le 2 \cdot \varepsilon \quad \text{dla}$$

dostatecznie dużych n ■