Wykłady z Analizy IV

1 Wykład 27.02.2017

Teoria Miary

Przypomnienie 1.1. $f : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy gdy zbiór punków nieciągłości f jest miary zero w sensie Lebesgeu'a.

Czym jest miara i jakie zbiory daje sie mierzyć?

Przykład 1.2. $[a,b] \subset \mathbb{R}$ miara $([a,b]) = b - a$.

Własności miary: miara$([a,b] \sqcup [c,d]) =$ miara$([a,b]) +$ miara$([c,d])$

Definicja 1.3. Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną podzbiorów X. Mówimy, że $\mathcal{A}$ jest algebrą zbiorów jeśli:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mamy $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$
3. $\forall A_1 \in \mathcal{A}$ mamy $X \backslash A \in \mathcal{A}$

Definicja 1.4. Niech Σ będzie rodziną podzbiorów zbioru X. Mówimy, że Σ jest σ-algebrą jeśli:

1. $X \in \mathcal{A}$
2. jeśli $A_n \in \Sigma$ dla $n \in \mathbb{N}$ to $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$
3. $A \in \Sigma$ to $X \backslash A \in \Sigma$

Przykład 1.5. $X-$ zbiór dowolny i $\Sigma = 2^X-$ zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X.

Uwaga 1.6. Jeśli $(\Sigma_i)_{i \in I}$ jest rodziną σ-algebr to $\bigcap_{i \in I} \Sigma_i$ też jest σ-algebrą. W szczególności jeśli S jest dowolną rodziną podzbiorów zbioru X to istnieje najmniejsza σ-algebra $\Sigma(S)$ zawierająca S.

Przykład 1.7. $X = \mathbb{R}^n$ i niech $S =$ zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$. Wówczas $\Sigma(S)$ oznaczamy $\mathcal{B}^n$. Elementy $\mathcal{B}^n$ nazywamy zbiorami bolerowskimi.

Parę (X, Σ) nazywamy przestrzenią mierzalną.

Definicja 1.8. Niech (X, Σ) będzie przestrzenią mierzalną. Miarą (X, Σ) nazywamy funkcję $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ taką, że jeśli $A_k \in \Sigma,\ k \in \mathbb{N}$ i $A_m \cap A_n = \varnothing$ dla $m \neq n$ to $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Definicja 1.9. Premiara na algebrze $\mathcal{A}$ podzbiorów X jest funkcją $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ taką, że jeśli $A_k \in \mathcal{A}$ $A_m \cap A_n = \varnothing$ dla $m \neq n$ oraz $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ to $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Stwierdzenie 1.10. Niech μ będzie miarą na (X, Σ). Wówczas:

1. $A \subseteq B$ to $\mu(A) \leqslant \mu(B)$
2. $A_n \in \Sigma$ takie, że $A_k \subseteq A_{k+1}$ to $\mu(A_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$ (w tym kontekście będziemy stosować symbol $A_k \nearrow A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$)
3. $A_n \in \Sigma,\ A_k \supseteq A_{k+1},\ \mu(A_1) < \infty$ to $\mu(A_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$ (notacja: $A_k \searrow A = \bigcap_{k=1} A_k$)

*Dowód.*Ad(1) $\mu(B) = \mu(B\backslash A \sqcup A) = \mu(B\backslash A) + \mu(A) \geqslant \mu(A)$

Ad(2) Połóżmy $\tilde{A}_k = A_k\backslash A_{k-1},\ k > 1$ oraz $\tilde{A}_1 = A_1$. Wówczas

$$A_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} \tilde{A}_k \text{ oraz } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \tilde{A}_k$$

a stąd

$$\mu(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mu(\tilde{A}_n) \xrightarrow{k\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\tilde{A}_k) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_n)$$

Ad(2) Połózmy $B_k = A_1\backslash A_k$.. Wówczas B_k jest wstępującą rodziną zbiorów oraz $B_k \nearrow A_1\backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Zatem

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(B_k) \xrightarrow{k\to\infty} \mu(A_1\backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \mu(A_1) - \mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$$

□

Definicja 1.11. Niech μ będzie miarą na $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$. Jeśli dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^n$ $\mu(K) < \infty$ to mówimy, że μ jest miarą bolerowską. Mówimy, że μ jest:

1. zewnętrznie regularne jeśli $\forall A \in \mathcal{B}^n\ \mu(A) = \inf\{\mu(\mathcal{O}),\ A \subset \mathcal{O},\ \mathcal{O} - \text{otwarty}\}$
2. wewnętrznie regularna jeśli $\forall A \in \mathcal{B}^n\ \mu(A) = \sup\{\mu(K),\ K < A,\ K - \text{zwarty}\}$

Jeśli 1. i 2. są spełnione to mówimy, że μ jest regularna.

Skąd brać miary regularne borelowskie na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$?
Przypuśćmy, że μ jest taką miarą. Zdefiniujmy funkcję $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gdzie:

$$F_\mu(x) = \begin{cases} -\mu((x, 0]) \text{ dla } x < 0 \\ 0 \text{ dla } x = 0 \\ \mu((0, x]) \text{ dla } x > 0 \end{cases}$$

Wówczas F_μ jest niemalejącą funkcją ciągłą z prawej strony $F_\mu(x) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} F_\mu(x + \epsilon)$ Połóżmy $F_\mu(x^-) = \lim_{x\downarrow 0} F_\mu(x - \epsilon)$. Wówczas

$$\mu(A) = \begin{cases} F_\mu(b) - F_\mu(a)\ A = (a, b] \\ F_\mu(b) - F_\mu(a^-)\ A = [a, b] \\ F_\mu(b^-) - F_\mu(a)\ A = (a, b) \\ F_\mu(b^-) - F_\mu(a^-)\ A = [a, b) \end{cases}$$

Naszym celem jest wykazanie twierdzenia: jeśli $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest niemalejącą funkcją ciągłą z prawej strony i $F(0) = 0$ to istnieje dokładnie jedna miara bolerowska regularna $\mu : \mathcal{B}^1 \to [0, \infty]$ taka, że $F = F_\mu$.

Przykład 1.12. Biorąc funkcje

$$F_\mu(x) = \begin{cases} -1 \text{ dla } x < 0 \\ 0 \text{ dla } x \geqslant 0 \end{cases}$$

to odpowiednie μ jest deltą Diraca w $0 \in \mathbb{R}$.

$$\delta(A) = \begin{cases} 0 \text{ dla } 0 \notin A \\ 1 \text{ dla } 0 \in A \end{cases}$$

Przykład 1.13. $F(x) = x$ to odpowiednie μ jest miarą Lebesgeu'a. Rzeczywiście:

$$\mu((0, x]) = x \text{ dla } x > 0$$

$$\mu((x, 0]) = -x \text{ dla } x < 0$$

czyli $F_\mu = F$.

Definicja 1.14. Niech $\mathcal{M}$ będzie rodziną podzbiorów X. Mówimy, że $\mathcal{M}$ jest klasą monotoniczną gdy:

1. jeśli $A_n \in \mathcal{M}$ oraz $A_n \nearrow A$ to $A \in \mathcal{M}$
2. jeśli $A_n \in \mathcal{M}$ oraz $A_n \searrow A$ to $A \in \mathcal{M}$

Uwaga 1.15. Jeśli S jest rodziną podzbiorów X to istnieje najmniejsza klasa monotoniczna zawierająca S, którą oznaczamy $\mathcal{M}(S)$.

Twierdzenie 1.16. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą podzbiorów X. Wówczas $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Sigma(\mathcal{A})$.

2 Wykład II 6.03.2017

Twierdzenie 2.1. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą podzbioru X. Wtedy $\Sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Dowód. Oznaczenie: $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}$.
Ustalmy podzbiór $A \subset X$ i rozważmy $M(A) = \{B \in \mathcal{M} : A \cup B \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{M}$. $M(A)$ jest klasą monotoniczną. Rzeczywiście jeśli $B_n \in M(A)$ oraz $B_n \nearrow B$ to $A \cup B_n \nearrow A \cup B \in \mathcal{M}$. Zatem $B \epsilon M(A)$. Podobnie argumentujemy dla $B_n \searrow B$.

Jeśli $A \in \mathcal{A}$ to $\forall B \in \mathcal{A}$ mamy $A \cup B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, zatem $B \in M(A)$. To pokazuje, że $\mathcal{A} \subset M(A) \subset \mathcal{M}$ zatem $M(A) = \mathcal{M}$ (bo $\mathcal{M}$ jest najmniejszą klasą monotoniczą zawierającą $\mathcal{A}$). W szczególności, mamy $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}$ jeśli przynajmniej jeden ze zbiorów (B_1 lub B_2) jest elementem $\mathcal{A}$. To pokazuje,że $\mathcal{A} \subset M(B)$ dla wszystkich $B \in \mathcal{M}$ i $M(B) = \mathcal{M}$. Czyli $\mathcal{M}$ jest zamknięty na branie sum.

Czy $\mathcal{M}$ jest zamknięty na branie dopełnień? Niech $\mathcal{N} = \{A \in \mathcal{M} : X \backslash A \in \mathcal{M}\}$. Zauważmy, że $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ oraz $\mathcal{N}$ jest klasą monotoniczną. Zatem $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. Czyli $\mathcal{M}$ jest algebrą.

$\mathcal{M}$ jest σ-algebrą: niech $\mathcal{A}_n \in \mathcal{M}, n \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $\widetilde{A_n} = \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}$ oraz $\widetilde{A_n} \nearrow \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Czyli $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}$ i $\mathcal{M}$ jest σ-algebrą co pokazuje $\Sigma \subset \mathcal{M}$. Na odwrót: $\mathcal{M} \subset \Sigma$ bo Σ jest klasą monotoniczną zawierającą $\mathcal{A}$. $\square$

Twierdzenie 2.2. Niech $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ będzie premiarą σ-skończoną. Wówczas jeśli premiara μ rozszerza się do miary na $\Sigma(\mathcal{A})$ to tylko na jeden sposób.
Przypomnienie: μ jest σ-skończona jeśli $\exists$ zbiory $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $\mu(X_i) < \infty$ oraz $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$.

Dowód. Przypadek 1. $\mu(x) < \infty$: przypuśćmy, że μ ma dwa rozszerzenia $\widetilde{\mu_1}, \widetilde{\mu_2} : \Sigma(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$. Niech $M = \{A \in \Sigma(\mathcal{A}) : \widetilde{\mu_1}(A) = \widetilde{\mu_2}(A)\}$. Zauważmy, że $\mathcal{A} \subset M$. Jest jasne, że jeśli $A_n \nearrow A$ oraz $A_n \in M$ to $A \in M$. Ponieważ $\mu(x) < \infty$ to także dla $A_n \searrow A$ mamy $A \in M$. Czyli M jest klasą monotoniczną a więc $M = \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \Sigma(\mathcal{A})$.
Przypadek 2: μ jest σ-skończona: $\exists$ ciąg $X_n \nearrow X$ gdzie $\mu(X_n) < \infty$.
Na mocy poprzedniego przypadku $\widetilde{\mu_1}(A \cap X_n) = \widetilde{\mu_2}(A \cap X_n), n \in \mathbb{N}$. Biorąc $n \to \infty$ dostajemy $\widetilde{\mu_1}(A) = \widetilde{\mu_2}(A)$. □

Twierdzenie 2.3. Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejąca, ciągła z prawej strony. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą skończonych sum rozłącznych odcinków. Dla odcinka $A \subset \mathbb{R}$ definiujemy

$$\mu_F(A) = \begin{cases} F(b) - F(a^-), & A = [a, b] \\ F(b^-) - F(a^-), & A = [a, b) \\ F(b^-) - F(a), & A = (a, b) \\ F(b) - F(a), & A = (a, b] \end{cases}$$

Niech μ_F będzie rozszerzeniem μ_F(odcinki) do $\mathcal{A}$. Wówczas μ_F jest premiarą regularną na $\mathcal{A}$.

Dowód. Wprost z konstrukcji wynika, że μ_F jest addytywna. Wykażemy, że μ_F jest zew. regularna: niech $A \in \mathcal{A}$. Można założyć, że A jest skończoną sumą odcinków otwartych i punktów. Zewnętrzna regularność ze względu na odcinki otwarte jest oczewista. Niech $x \in \mathbb{R}$, $\mu_F(\{x\}) = \mu_F(\{[x, x]\}) = F(x) - F(x^-) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}(F(x + \epsilon) - F(x - \epsilon)) = \lim_{\epsilon\downarrow 0} \mu_F((x - \epsilon, x + \epsilon))$, co pokazuje, zewnętrzną regulrność dla punktów.

Wykażemy, że μ_F jest wew. regularna: z punktami nie ma problemu. Łatwo też sprawdzić że $\mu_F((a, b)) = \lim_{n\to\infty} \mu_F([a_n, b_n])$ gdzie $a_n \searrow a$, $b_n \nearrow b$.

Wykażemy σ-addytywność: niech $I = \bigcup_{n=1}^{\infty}$, gdzie I, I_n - skończone sumy rozłącznych odcinków. Bez straty ogólności możemy założyć że I jest odcinkiem oraz I_n również są odcinkami.

Przypadek 1: I jest zwartym odcinkiem. $\forall \epsilon$ istnieją odcinki otwarte J_n takie, że $I_n \subset J_n$ oraz t. że $\mu_F(J_n) \leqslant \mu_F(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$ (zewnętrzna regularność). Skoro I jest zbiorem zwartym to $\exists N$ t. że $I \subset \bigcup_{n=1}^{N} J_n$. Zatem $\mu(I) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu(J_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n) + \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ i widzimy, że $\mu(I) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$. W drugą stronę $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = I$ to $\mu(I) \geqslant \sum_{n=1}^{M} \mu(I_n) \underset{M\to\infty}{\Longrightarrow} \mu(I) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$.

Przypadek 2: jeśli I jest odcinkiem ograniczonym to dokładając ewentualnie brzegi I i korzystając z poprzedniego argumentu dostajemy σ-addytywność .

Przypadek 2: jeśli $I = [a, \infty)$ to biorąc $x > a$ i rozważając przejście graniczne $[a, x] \underset{x\to\infty}{\nearrow} [a, \infty)$ też można pokazać, że $\mu(I) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(I_n)$ dla $I = [a, \infty)$. □

Niech $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ będzie premiarą. Dla $A \subset X$ definiujemy

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)^* : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A}\}.$$

Własności μ^* :

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$

2. $A_1 \subseteq A_2$ to $\mu^*(A_1) \leqslant \mu^*(A_2)$, $A_i \subset X$

3. $\mu^*(\bigcup_{n=1}^\infty A_n) \leqslant \sum_{n=1}^\infty \mu^*(A_n)$ - podaddytywność

4. Jeśli $A \in \mathcal{A}$ to $\mu^*(A) = \mu(A)$

μ^* jest tzw. miarą zewnętrzną.

Twierdzenie 2.4. Niech μ^* będzie miarą zew. na zbiorze X. Wówczas rodzina Σ podzbiorów X spełniających warunek Caratheodory'ego: $A \in \Sigma$ iff

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E),$$

dla wszystkich $E \subset X$ jest σ-algebrą oraz μ^* obcięte do Σ jest miarą.

Dowód. $A, B \in \Sigma$ to $A \cup B \in \Sigma$.

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \\
&= \mu^*(B \cap A \cap E) + \mu^*(B^c \cap A \cap E) + \mu^*(B \cap A^c \cap E) + \mu^*(B^c \cap A^c \cap E) = \\
&\geqslant \mu^*((A \cup B) \cap E) + \mu^*((A \cup B)^c \cap E)
\end{aligned}$$

Podaddytywność μ daje nierówność przeciwną: $\mu^*((A \cup B) \cap E + \mu^*((A \cup B)^c \cap E) \geqslant \mu^*(E)$. Niech $A_n \in \Sigma$. Można założyć że $A_n \cap A_m = \emptyset, n \neq m$. Niech $\widetilde{A_n} = \bigcup_{k=1}^n A_k$ oraz $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$.

$$\begin{aligned}
\mu^*(\widetilde{A_n} \cap E) &= \mu^*(A_n \cap \widetilde{A_n} \cap E) + \mu^*(A_n^c \cap E) = \\
&= \mu^*(A_n \cap R) + \mu^*(\widetilde{A_{n-1}} \cap E) = \\
&\vdots \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \mu^*(A_k \cap E)
\end{aligned}$$

Ponadto:

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(\widetilde{A_n} \cap E) + \mu^*(\widetilde{A_n}^c \cap E) = \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^n \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*(\widetilde{A_n}^c \cap E) \geqslant \\
&\geqslant \textstyle\sum_{k=1}^n \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*(A^c \cap E), \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \\
\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\star)\mu^*(E) &\geqslant \textstyle\sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \\
&\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) \\
&\geqslant \mu^*(E), \text{ zatem } A \in \Sigma
\end{aligned}$$

μ^* obcięte do μ jest miarą:
$E = A$ w $\star$ daje

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_n \cap A) + \mu^*(A^c \cap A) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k)$$

$\square$

3 Wykład 13.03.2017

Warunek Caratheodory'ego (warunek na zbiór A): $A \in \Sigma \Leftrightarrow \mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E) \quad \forall E \subset X$, gdzie Σ to σ-algebra, a μ^* to miara zewnętrzna.

Twierdzenie 3.1. Niech $\mathcal{A}$ będzie algebrą podzbiorów X oraz $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ będzie premiarą. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną związaną z μ. Wówczas $\mathcal{A} \subset \Sigma$.

Przykład 3.2. $\mathcal{A} = \{$algebra skończonych, parami rozłącznych odcinków$\}$

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \mu(]a,b]) = \mu([a,b[) = b - a$$

Σ zawiera $\mathcal{A}$ oraz $\mu^*|_\Sigma$ jest miarą na Σ, którą nazywamy miarą Lebesgeu'a.

Dowód. Niech $A \in \mathcal{A}$ oraz $E \subset X$. Subaddytywność μ^*:

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E).$$

Niech $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie pokryciem zbioru E zbiorami $A_n \in \mathcal{A}$. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A' \cap A_n) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E).$$

Biorąc inf po pokryciach dostajemy $\mu^*(E) \geqslant \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A' \cap E)$. □

CAŁKA LEBESGEU'A: (X, Σ, μ) - przestrzeń z miarą

Definicja 3.3. Niech $f : X \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest mierzalna jeśli dla każdego zbioru mierzalnego $A \in \mathcal{B}^n$ (σ-algebra podzbiorów borelowskich), $f^{-1}(A) \in \Sigma$ (przeciwobraz zbioru borelowskiego jest mierzalny).

Stwierdzenie 3.4. Funkcja $f : X \to \mathbb{R}^n$ jest mierzalna $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(I) \in \Sigma$ dla wszystkich I postaci $I = (a_1, \infty) \times (a_2, \infty) \times \ldots \times (a_n, \infty)$.

Dowód. (Szkic):
$\Rightarrow$ oczywiste
$\Leftarrow$ jeśli f spełnia $f^{-1}(I) \in \Sigma$ to $f^{-1}(J) \in \Sigma$ dla $J = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Dowolny zbiór otwarty w $\mathbb{R}^n$ jest przeliczalną sumą kostek. □

Stwierdzenie 3.5. $f : X \to \mathbb{R}^n$ - mierzalna oraz $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mierzalna. Wówczas $g \circ f$ jest mierzalna. W szczególności jesli $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ są mierzalne to $f_1 + f_2$, $f_1 f_2$ są mierzalne.

Dowód. $A \in \mathcal{B}^n$, $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1} \circ g^{-1}(A)$
$g^{-1}(A)$ - zbiór borelowski, a więc $f^{-1} \circ g^{-1}(A)$ - mierzalny.
$f : X \to \mathbb{R}^2$:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}.$$

$g, \tilde{g} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$g(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \qquad \tilde{g}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2.$$

Wówczas:

$$g \circ f = f_1 + f_2, \qquad \tilde{g} \circ f = f_1 \cdot f_2.$$

Każda z funkcji g, $\tilde{g}$ i f jest mierzalna, więc ich złożenia również. □

Twierdzenie 3.6. Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji mierzalnych. Wówczas $\sup_{n\in\mathbb{N}}(f_n)$, $\inf_{n\in\mathbb{N}}(f_n)$, $\liminf_{n\to\infty}(f_n)$, $\limsup_{n\to\infty}(f_n)$ są mierzalne.

Dowód. Wystarczy pokazać dla sup:

- $\inf(f_n) = -\sup(-f_n)$,
- $\limsup_{n\to\infty}(f_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}}(\tilde{f_n})$, gdzie $\tilde{f_n}(x) = \sup_{k\geqslant n} f_k(x)$,
- podobnie dla $\liminf$.

Dwodzimy więc dla sup:

$$x \in \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}\Big((a,\infty)\Big) \Leftrightarrow \exists n : f_n(x) > a \Leftrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}(a,\infty) \in \Sigma$$

□

Notacja: $A \in \Sigma$ to funkcja charakterystyczna zbioru A:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

jest mierzalna.

Definicja 3.7. Mówimy, że funkcja $s : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją prostą, jesli zbiór jej wartości jest skończony.
Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ będą wartościami funkcji s, $A_i = s^{-1}(\alpha_i)$, wtedy $s(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_A(x)$.

Definicja 3.8. Niech $s : X \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją prostą, $A \in \Sigma$. Wówczas liczbę $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap A)$ oznaczamy $\int_A s(x)d\mu(x)$ i nazywamy całką z s po zbiorze A względem miary μ.

Twierdzenie 3.9.
(i) $\int_A sd\mu = \int_X \chi_A sd\mu$,
(ii) $\int_{\bigsqcup_{i=1}^\infty A_i} sd\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} sd\mu$,
(iii) $\int_A \alpha sd\mu = \alpha \int_A sd\mu, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+$,
(iv) $\int_A (s+t)d\mu = \int_A sd\mu + \int_A td\mu$,
(v) $A \subset B \Rightarrow \int_A sd\mu \geqslant \int_B sd\mu$,
(vi) $s \geqslant t \Rightarrow \int_A sd\mu \geqslant \int_A td\mu$.

Dowód.
(i) jest wnioskiem z równości $\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = \chi_{A\cap B}(x)$.
(ii) wynika z σ-addytywności μ.
(iii) oczywiste.

(iv) $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $t = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$, $\quad C_{ij} = A_i \cap B_j$, $\quad s + t = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$.

$$\begin{aligned} \int_A (s+t) &= \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j \cap A) = \\ &= \sum_i \alpha_i \sum_j \mu(A_i \cap A \cap B_j) + \sum_j \beta_j \sum_i \mu(B_j \cap A \cap A_i) = \\ &= \sum_i \alpha_i \mu(A_i \cap A) + \sum_j \beta_j \mu(B_j \cap A) = \int_A s d\mu + \int_A t d\mu, \end{aligned} \tag{1}$$

gdyż np. $\mu(A_i \cap A) = \mu(A_i \cap A \cap \bigsqcup_{j=1}^{m} B_j) = \sum_j \mu(A_i \cap A \cap B_j)$.

(v) jasne.

(vi) Jeśli $s \leqslant t$ i $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, $t = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{B_j}$ to kładąc $C_{ij} = A_i \cap B_j \quad \exists \gamma_{ij}$ i δ_{ij}, gdzie $\gamma_{ij} \leqslant \delta_{ij}$ takie, że $s = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \chi_{C_{ij}}$ i $t = \sum_{i,j} \delta_{ij} \chi_{C_{ij}}$.

$$\int_A s d\mu = \sum_{i,j} \gamma_{ij} \mu(C_{ij} \cap A) \leqslant \sum_{i,j} \delta_{ij} \mu(C_{ij} \cap A) = \int_A t d\mu.$$

□

Całkowanie dowolnej (dodatniej) funkcji mierzalnej:

Definicja 3.10. Jeśli $f : X \to \mathbb{R}_+$ to $\sup_{s \leqslant f} (s d\mu)$ nazywamy całką po zbiorze A i oznaczamy:

$$\int_A f d\mu$$

.

4 Wykład 20.03.2017

Przypomnienie 4.1. Jeśli $f : X \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją mierzalną, to całkę z f po A definiujemy wzorem $A \in \Sigma$, $\int_A f d\mu = \sup_{s \leqslant f} \int_A s d\mu$ gdzie s są dodatnimi funkcjami prostymi.

Twierdzenie 4.2 (Twierdzenie o zbieżności monotonicznej)**.** Niech (f_n) będzie ciągiem rosnącym nieujemnych funkcji mierzalnych oraz niech $f = \lim_{n \to \infty} f_n$. Wówczas:

$$\lim_{n \to \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$$

dla wszystkich $A \in \Sigma$.

Dowód. Zauważmy, że ciąg $\alpha_n = \int_A f_n d\mu$ jest rosnący. Niech $\alpha = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$. Skoro $f_n \leqslant f$ to $\alpha_n = \int_A f_n d\mu \leqslant \int_A f d\mu$ i

$$\alpha \leqslant \int_A f d\mu \tag{2}$$

Nierówność odwrotna: ustalmy funkcję prostą $s \leqslant f$ oraz $\theta \in]0;1[$ i niech

$$A_n = \{x \in A : f_n(x) \geqslant \theta s(x)\}$$

Wówczas $A_n \nearrow A$. Zatem

$$\int_A f_n d\mu \geqslant \int_{A_n} f_n d\mu \geqslant \theta \int_{A_n} s d\mu$$

Przechodząc z $n \to \infty$ dostajemy $\alpha \geqslant \theta \int_A s d\mu$. Zatem

$$\alpha \geqslant \theta \sup_{s \leqslant f} \int_A s d\mu = \theta \int_A f d\mu.$$

Skoro jest tak dla wszystkich $\theta \in]0,1[$ to $\alpha \geqslant \int_A f d\mu$ co wraz z (2) daje $\alpha = \int_A f d\mu$. ☐

Uwaga 4.3. Niech $f : X \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją mierzalną. Weźmy funkcję prostą

$$s_n = \sum_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{A_k}, \text{ gdzie } \quad A_k = f^{-1}\left(\Big[\frac{k}{2^n}; \frac{k+1}{2^n}\Big[\right) \quad \text{and} A_{n2^n} = f^{-1}([n, \infty[).$$

Wówczas (s_n): jest wzrastającym ciągiem funkcji prostych oraz $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$. Zatem $\int_A f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A s_n d\mu$.

Wniosek 4.4.

$$f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}_+ \qquad \int_A (f_1 + f_2) d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu.$$

Dowód. Niech $s_n \nearrow f_1$ i $t_n \nearrow f_2$, gdzie s_n, t_n są funkcjami prostymi. Wtedy $s_n + t_n \nearrow f_1 + f_2$ i korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej dostajemy $\int_A (f_1 + f_2) d\mu = \int_A f_1 d\mu + \int_A f_2 d\mu$. ☐

Lemat 4.5 (Lemat Fatou)**.** Niech $\forall n \in \mathbb{N}$ $f_n : X \to \mathbb{R}_+$ będą mierzalne. Wówczas

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \geqslant \int_A (\lim \inf_{n\to\infty} f_n) d\mu.$$

Dowód. Zauważmy, że ciąg $g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k$ jest rosnącym ciągiem funkcji oraz $\liminf_{n\to\infty} f_n := \lim_{n\to\infty} g_n$. Ponadto $\forall n \in \mathbb{N}$ $g_n \leqslant f_n$ i $\int_A g_n d\mu \leqslant \int_A f_n d\mu$ a więc

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu \leqslant \lim \inf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu (\star).$$

Z drugiej strony $(\int_X g_n d\mu)$ jest rosnący, zatem:

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu$$

Korzystając z twierdzenia o zbieżności monotonicznej widzimy, że

$$\lim_{n\to\infty} \int_A g_n d\mu = \int_A \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

i dostajemy

$$\int_A \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$$

☐

Całkowanie funkcji rzeczywistych Niech $f : X \to \mathbb{R}$ i będzie funkcją mierzalną oraz $f^+ = \max(f, 0)$ i $f^- = \max(0, -f)$. Funkcje f^+ i f^- są dodatnie oraz $f = f^+ - f^-$. Jeśli całka z f^+ i całka z f^- są skończone, to całkę z f definiujemy wzorem

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu.$$

Jeśli $f : X \to \mathbb{C}$ oraz całki

$$\begin{aligned} &\int_A \Re(f)^+ d\mu < \infty, \int_A \Im(f)^+ d\mu < \infty \\ &\int_A \Re(f)^- d\mu < \infty, \int_A \Im(f)^- d\mu < \infty \end{aligned} \tag{3}$$

to definiujemy: $\int_A f d\mu = \int_A \Re(f) d\mu + i \int_A \Im(f) d\mu \in \mathbb{C}$. Łatwo pokazać, że f spełnia (3) $\Leftrightarrow$ $\int_A |f| d\mu < \infty$. Ponadto $|\int_A f d\mu| \leqslant \int_A |f| d\mu$ oraz $\int_A |f + g| d\mu \leqslant \int_A |f| d\mu + \int_A |g| d\mu$.

Uwaga 4.6. Symbolem $\mathcal{L}^1(X, d\mu)$ będziemy oznacząć zbiór funkcji, o skończonej całce z modułu, tj:

$$\mathcal{L}^1(X, d\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \int_X |f| d\mu < \infty\}$$

Twierdzenie 4.7 (Twierdzenie Lebesgeu'a o zbieżności zmajoryzowanej)**.** Niech $f_n \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ i$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zbieżnym punktowo do f ciągiem funkcji. Przypuśćmy, że $\exists g \in \mathcal{L}^1(X, d\mu)$ taka że $\forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leqslant g(x)$. Wtedy $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu$.

Terminologia: $g(x)$ nazywamy majorantą $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\forall n \in \mathbb{N} f_n \geqslant 0$. Z lematu Fatou dostajemy

$$\liminf \int_A f_n d\mu \geqslant \int_A f d\mu$$

Zauważmy, że

$$\lim \inf_{n\to\infty} (-f_n) = -\lim \sup_{n\to\infty} (f_n)(\star\star\star).$$

Skoro $g - f_n \geqslant 0$ to z lematu Fatou mamy

$$\lim \inf_{n\to\infty} \int_A (g - f_n) d\mu \geqslant \int_A \lim \inf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu = \int_A (g - f_n) d\mu.$$

Skracając $\int_A g d\mu$ dostajemy: $-\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \geqslant -\int_A f d\mu$ a więc $\int_A f d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$
W końcu

$$\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \geqslant \int_A f d\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu \geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu.$$

Skoro ciąg nierówności zaczyna się i kończy $\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ to nierówności powyższe są równościami. W szczególności $\liminf_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \limsup_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ i w końcu $\lim_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$. □

Iloczyn tensorowy miar Niech (X_1, Σ_1, μ_1) i (X_2, Σ_2, μ_2) będą przestrzeniami z miarą $\sigma-$skończoną. Konstrukcja przestrzeni $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$:

- zbiory postaci $A_1 \times A_2$, gdzie $A_i \in \Sigma_i$ nazywamy prostokątami mierzalnymi;
- niech $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ będzie najmniejszą $\sigma-$algebrą zawierającą wszystkie prostokąty mierzalne;
- miara $\mu_1 \otimes u_2$ powinna dla prostokąta $A_1 \times A_2$ spełniać $(\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2)$ oraz powinno zachodzić twierdzenie Fubiniego:

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{X_1} d\mu_1 \int_{X_2} d\mu_2 f(x_1, x_2) = \int_{X_2} d\mu_2 \int_{X_1} d\mu_1 f(x_1, x_2)$$

Okazuje się, że warunki te jednoznacznie wyznaczają pewną miarę na $X_1 \times X_2$ W szczególności konstrukcja ta zastosowana ($n-1$ krotnie) do miary Lebesgeu'a na $\mathbb{R}$ daje miarę Lebesgeu'a na $\mathbb{R}^n$.

5 Wykład 27.03.2017

Uwaga 5.1. (X_i, Σ_i, μ_i), $i = 1, 2$, μ_i – σ-skończone $\to$ $(X_1 \times X_2, \Sigma_1 \otimes \Sigma_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$, gdzie dla $A \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$

$$\underbrace{(\mu_1 \otimes \mu_2)(A)}_{(*)=\int_{X_1 \times X_2} \chi_A(x_1,x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1,x_2)} = \int_{X_1} d\mu(x_1) \left(\int_{X_2} \chi_A(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) =$$

$$\int_{X_2} d\mu(x_2) \left(\int_{X_1} \chi_A(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right)$$

Korzystając z $(*)$ oraz tw. o zbieżności monotonicznej dowodzi się tw. Fubiniego:

Twierdzenie 5.2. Niech f będzie funkcją na $X_1 \times X_2$ (mierzalną)

- jeśli f jest dodatnia to

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2) = \int_{X_1} d\mu_1(x_1) \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\mu_2(x_2) \right) =$$

$$\int_{X_2} d\mu_2(x_2) \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu_1(x_1) \right)$$

- jeśli $f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{C}$ to $\int_{X_2} |f(\cdot, x_2)| d\mu_2 \in \mathcal{L}^1(X_1, d\mu_1)$, gdy $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, d(\mu_1 \otimes \mu_2))$

Ponadto jeśli $f \in \mathcal{L}^1(X_1 \times X_2, d(\mu_1 \otimes d\mu_2))$ to zachodzi wzór z punktu pierwszego.

Definicja 5.3. Niech $1 \leqslant p < \infty$, $p \in \mathbb{R}$. Przestrzenie $\mathcal{L}^p(X, d\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{C} : \int_X |f|^p d\mu < \infty \right\}$. Notacja $||f||_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$. Mówimy, że $f : X \to \mathbb{C}$ jest zero μ–prawie wszędzie jeśli

$$\mu(\{x \in X : f(x) \neq 0\}) = 0.$$

Przykład 5.4. $f = \chi_A$, gdzie $\mu(A) = 0, A = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Lemat 5.5. $||f||_p = 0 \iff f = 0$ μ–p. w.

Dowód. $\Rightarrow$ Niech $A_n = \{x \in X : |f(x)| \geqslant \frac{1}{n}\}$, $A = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Zauważmy, że $\cap_{n-1}^{\infty} A_n \searrow A$. Ponadto

$$\int_X |f|^p d\mu \geqslant \int_{A_n} |f|^p d\mu \geqslant \frac{1}{n^p}\int_{A_n} d\mu = \frac{1}{n^p}\mu(A_n) \Rightarrow \mu(A_n) = 0$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Skoro $A_n \searrow A$ to $\mu(A) = 0$.
$\Leftarrow$

$$\int_X |f|^p d\mu = \underbrace{\int_A |f|^p d\mu}_{=0,\text{ bo } \mu(A)=0} + \underbrace{\int_{X\setminus A} |f|^p d\mu}_{=0,\text{ bo na } X\setminus A\ f=0}$$

$\square$

Uwaga 5.6. $\mathcal{L}^p(X, d\mu)$ są przestrzeniami wektorowymi. Rzeczywiście:

$$|f+g|^p \leqslant 2^p \max(|f|^p, |g|^p) \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

i jeśli $||f||_p < \infty$ i $||g||_p < \infty$ to $||f+g||_p < \infty$.

$$\mathcal{N}(X, d\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : f - \text{zero } \mu\text{–p. w.}\}$$

$$\mathcal{L}^p(X, d\mu)/\mathcal{N}(X, d\mu) := L^p(X, d\mu)$$

i na $L^p(X, d\mu)$ definiujemy normę p–tą j.w.

Przestrzeń $\mathcal{L}^\infty(X, d\mu)$ i $||\cdot||_\infty$

$$||f||_\infty = \inf\{C : \mu(\{x \in X : |f(x)| > C\}) = 0\}$$

Twierdzenie 5.7. (Nierówność Höldera) Niech $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ spełniają $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jeśli $f \in L^1(X, d\mu)$ oraz $g \in L^q(X, d\mu)$ to $f \cdot g \in L(X, d\mu)$ oraz $||fg||_1 \leqslant ||f||_p ||g||_q$

Dowód. zał., że $p \neq \infty, q \neq \infty$ i zał. bez straty ogólności, że $||f||_p = ||g||_q = 1$. Wypukłość funkcji exp daje:

$$e^{\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)} \leqslant \frac{1}{p}e^x + \frac{1}{q}e^y.$$

Kładąc $x = \log|f|^p, y = \log|g|^q$, mamy

$$|f| \cdot |g| \leqslant \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|q|^q$$

$$||f \cdot g||_1 = \int |f \cdot g| \leqslant \frac{1}{p}\int |f|^p + \frac{1}{q}\int |g|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = ||f||_p \cdot ||g||_q$$

Dla $q = \infty, p = 1$

$$|fg| \underbrace{\leqslant}_{\mu-\text{ p. w.}} |f| \cdot ||g||_\infty \underbrace{\rightarrow}_{\text{całkujemy}} \int_X \underbrace{|fg|}_{||f\cdot g|| \leqslant ||f||_1 \cdot ||g||_\infty} \leqslant \int |f| \cdot ||g||_\infty$$

$\square$

Twierdzenie 5.8. (Nierówność Minkowskiego) $||f+g||_p \leqslant ||f||_p + ||g||_p$ gdy $f, g \in L^p(X, d\mu)$

Dowód. Niech $q : \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \left\{ \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \right\}$ Dalej:

$$|f+g|^p \leqslant (|f| + |g|)|f+g|^{p-1} = |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}$$

Całkując i stosując nier. Höldera

$$\int |f+g|^p \leqslant \left(\int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |f+g|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$\left(\int |f+g|^p \right)^{\frac{1}{q}} (||f||_p + ||g||_p) \implies \underbrace{||f+g||_p}_{=\left(\int |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}}} \leqslant ||f||_p + ||g||_p$$

□

Twierdzenie 5.9. Przestrzenie L^p są zupełne.

Dowód. Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie Cauchy'ego w $L^p(X, d\mu)$. Wystarczy pokazać, że $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma podciąg zbieżny. Można bez straty ogólności założyć (ewentualnie przechodząc do podciągu), że

$$||f_{n+1} - f_n||_p \leqslant \frac{1}{2^n}$$

Rozważmy funkcje $g_n = f_n - f_{n-1}, n > 1$ oraz $g_1 = f_1$ i zdefiniujmy funkcję $G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)|$. Zauważmy, że

$$\| \sum_{k=1}^{n} |g_k(x)| \|_p \leqslant \sum_{k=1}^{n} \|g_k(x)\|_p = \|f_1\|_p + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2} + \|f_1\|_p.$$

Na mocy tw. o zbieżności monotonicznej

$$\underbrace{|| \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(x)| ||_p}_{=\left(\int_X G(x)^p\right)^{\frac{1}{p}}} < \infty$$

Zatem $G(x) < \infty$ μ–p. w., czyli szereg $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ jest bezwzględnie zbieżny μ–p. w. Zauważmy, że $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = f_n - f_{n-1} + f_{n-1} - f_{n-2} + \ldots - f_1 = f_n(x)$. Niech $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n$. Wówczas $\lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_p = 0$. Rzeczywiście $|f - f_n|^p \xrightarrow{n\to\infty \text{ punktowo}} 0$ oraz $|f - f_n|^p \leqslant G(x)^p$ i skoro $\int G(x)^p < \infty$ to korzystając z tw. o zbieżności zmajoryzowanej:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n|^p = 0 = \lim_{n\to\infty} ||f - f_n||_p^p$$

□

Uwaga 5.10. $L^2(X, d\mu)$ jest przestrzenią Hilberta.

6 Wykład 03.04.2017

Przestrzenie Hilberta

Przykład 6.1. Ciągi sumowalne z kwadratem:

$$l^2(\mathbb{N}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

Iloczyn skalarny:

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} b_n \text{ dla } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$$

$l^2(\mathbb{N})$ jest przestrzenią unormowaną i $||(a_n)_{n\in\mathbb{N}}|| = \langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle^{1/2}$. Jeśli $\mathbb{N}$ zaopatrzymy w miarę liczącą: $\mu(A) = \#A$ to $l^2(\mathbb{N}) = L^2(\mathbb{N}, d\mu)$.
W szczególności $l^2(\mathbb{N})$ jest przestrzenią zupełną.

Definicja 6.2. Niech H będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$. Mówimy, że odwzorowanie $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{C}$ jest formą półtoraliniową jeśli:

- $\langle \phi, \alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 \rangle = \alpha_1 \langle \phi, \psi_1 \rangle + \alpha_2 \langle \phi, \psi_2 \rangle$ − liniowość w argumencie drugim
- $\langle \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2, \psi \rangle = \alpha_1 \langle \phi_1, \psi \rangle + \alpha_2 \langle \phi_2, \psi \rangle$ − antyliniowość w argumencie pierwszym

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ nazywamy iloczynem skalarnym jeśli dodatkowow:

- $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$
- $\langle \phi, \phi \rangle > 0, \ \phi \neq 0$

Niech $\phi \in H$. Mówimy, że ϕ jest wektorem jednostkowym jeśli $||\phi|| := \langle \phi, \phi \rangle^{1/2} = 1$. Dla $\psi \in H$ oraz ϕ unormowanego (jak wyżej) definiujemy:

$$\psi_{\|} = \langle \phi, \psi \rangle \phi \text{ oraz } \psi_{\perp} = \psi - \psi_{\|}$$

Łatwo się przekonać, że $\langle \psi_{\perp}, \phi \rangle = 0, \ \langle \psi_{\|}, \psi_{\perp} \rangle = 0$. Mówimy, że wektory $\psi_1, \psi_2 \in H$ są prostopadłe jeśli $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$, oznaczenie $\psi_1 \perp \psi_2$.

Twierdzenie 6.3. (Pitagorasa)
$\psi_1 \perp \psi_2 \Rightarrow ||\psi_1 + \psi_2||^2 = ||\psi_1||^2 + ||\psi_2||^2$. W szczególności

$$||\psi||^2 = ||\psi_{\|}||^2 + ||\psi_{\perp}||^2 = |\langle \psi, \phi \rangle|^2 + ||\psi_{\perp}||^2 \tag{4}$$

Twierdzenie 6.4. Nierówność Cauchy-Schwarza: $|\langle \phi, \psi \rangle| \leqslant ||\phi|| \cdot ||\psi||$ dla wszystkich $\phi, \psi \in H$.

Dowód. Nierówność Cauchy-Schwarza wystarczy wykazać dla $||\phi|| = 1$. Przy tym założeniu jest ona prostą konsekwencją (4). □

Lemat 6.5. $||\cdot||$ spełnia nierówność trójkąta (czyli jest normą)

Dowód. $||\psi+\phi||^2 = ||\psi||^2 + ||\phi||^2 + \langle\psi,\phi\rangle + \langle\phi,\psi\rangle = ||\psi||^2 + ||\phi||^2 + 2\mathrm{Re}\langle\psi,\phi\rangle \leqslant ||\psi||^2 + ||\phi||^2 + 2|\langle\psi,\phi\rangle| \leqslant ||\psi||^2 + ||\phi||^2 + 2||\psi||\cdot||\phi||$ □

Definicja 6.6. Przestrzeń H z iloczynem skalarnym $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nazywamy przestrzenią Hilberta jeżeli H z normą $\|\cdot\|$ jest zupełna (ciągi Cauchy'ego są w niej zbieżne).

Przykład 6.7. $(X,\Sigma,\mu)-$ przestrzeń z miarą, to wprowadzając iloczyn skalarny

$$\langle\phi,\psi\rangle = \int_X \overline{\phi(x)}\psi(x)d\mu(x)$$

gdzie $\phi,\psi \in L^2(X,d\mu)$, $L^2(X,d\mu)$ staje się przestrzenią Hilberta.

Definicja 6.8. Mówimy, że $\{\phi_i\}_{i\in I}$ jest układem ortonormalnym jeśli $\langle\phi_{i_1},\phi_{i_2}\rangle = 0$ $i_1 \neq i_2$ oraz $||\phi_i|| = 1$

Przykład 6.9. $L^2([-\pi,\pi],d\lambda)$ $\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikt}$ $k\in\mathbb{Z}$. Wówczas $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ jest układem ortonormalnym.

Stwierdzenie 6.10. Niech $\{\phi_i\}_{i\in I}^n$ będzie układem ortonormalnym oraz $\psi\in H$. Niech $\psi_\parallel = \sum_{i=1}^n\langle\phi_i,\psi\rangle\phi_i$ oraz $\psi_\perp = \psi - \psi_\parallel$. Wówczas:

$$\langle\phi_i,\psi_\perp\rangle = 0,\ ||\psi||^2 = \sum_{i=1}^n |\langle\phi_i,\psi\rangle|^2 + ||\psi_\perp||^2.$$

Jeśli $\hat{\psi}\in\mathrm{span}(\{\phi_i\}_{i=1}^n)$ to $||\psi-\hat{\psi}|| \geqslant ||\psi_\perp$ a równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy $\hat{\psi} = \psi_\parallel$

Dowód. Łatwo sprawdzić, że $\psi_\perp \perp \psi_i,\ i = 1,\cdots,n$ oraz $\psi_\perp \perp \psi_\parallel$. Z twierdzenia Pitagorasa:

$$||\psi||^2 = ||\psi_\perp||^2 + ||\psi_\parallel||^2 = \sum_{i=1}^n |\langle\phi_i,\psi\rangle|^2 + ||\psi_\perp||^2$$

Niech $\hat{\psi}\in\mathrm{span}(\{\phi_i\}_{i=1}^n)$ i $\hat{\psi} = \sum_{i=1}^n c_i\phi_i$. Wówczas $||\psi-\hat{\psi}|| = \sum_{i=1}^n(\langle\phi_i,\psi\rangle - c_i)\phi_i + \psi_\perp||^2 = \sum_{i=1}^n|\langle\phi_i,\psi\rangle - c_i|^2 + ||\psi_\perp||^2$, a stąd $||\psi-\hat{\psi}|| \geqslant ||\psi_\perp||^2$ oraz równość zachodzi gdy $c_i = \langle\phi_i,\psi\rangle$ co oznacza $\hat{\psi} = \psi_\parallel$ □

Wniosek 6.11. $\psi_\parallel$ jest elementem $\mathrm{span}\{\phi_i\}_{i=1}^n$ najbliższym wektora ψ

Wersja stwierdzenia dla nieskończonego układu ortonormalnego wymaga użycia zupełności H do definicji $\psi_\parallel$. Niech więc $\{\phi_i\}_{i\in I}$ będzie układem ortonormalnym gdzie I jest przeliczalnym zbiorem. Dla każdej skończonej podrodziny $\{\phi_1,\cdots,\phi_n\}$ zachodzi nierówność $\sum_{k=1}^n|\langle\phi_{i_k},\psi\rangle|^2| \leqslant ||\psi||^2$. Zatem szereg współczynników $\sum_{k=1}^n|\langle\phi_{i_k},\psi\rangle|^2| < \infty$. Ponadto ciąg $\sum_{k=1}^n\langle\phi_{i_k},\psi\rangle\phi_i$ tworzy ciąg Cauchy'ego. Rzeczywiście, dla $\psi_m = \sum_{i=1}^m\langle\phi_i,\psi\rangle\phi_i,\ \psi_m = \sum_{i=1}^m\langle\phi_i,\psi\rangle\phi_i$ dla $n > m$ mamy $||\psi_n - \psi_m||^2 = ||\sum_{i=m+1}^n\langle\phi_i,\psi\rangle||^2 = \sum_{i=1}^n|\langle\phi_i,\psi\rangle|^2 < \epsilon$ dla dostatecznie dużych n,m. Kładziemy $\psi_\parallel = \sum_{i\in I}\langle\phi_i,\psi\rangle\phi_i$.

Jeśli I nie jest przeliczalny to ciągle liczba niezerowych współczynników $\langle\phi_i,\psi\rangle$ jest co najwyżej przeliczalna i w tym przypadku również kładziemy $\psi_\parallel = \sum_{i\in I}\langle\phi_i,\psi\rangle\phi_i$.

Definicja 6.12. Jeśli układ jest ortonormalny $\{\phi_i\}_{i\in I}$ nie jest zawarty w istotnie większym układzie ortonormalnym to taki układ nazywamy bazą ortonormalną.

Twierdzenie 6.13. Następujące warunki są równoważne:

1. $\{\phi_i\}_{i\in I}$ jest bazą ortonormalną
2. $\psi = \sum_{i\in I} \langle \phi_i, \psi\rangle \phi_i$
3. $||\psi||^2 = \sum_{i\in I} |\langle \phi_i, \psi\rangle|^2$
4. $\langle \phi_i, \psi\rangle = 0$ dla każdego $i \in I \Rightarrow \psi = 0$

1. $\Rightarrow$ 2. $\psi = \psi_\perp + \psi_\parallel$ gdzie $\psi_\perp \perp \phi_i$, gdyby $\psi_\perp \neq 0$ to $\{\phi_i\}_{i\in I} \subset \{\phi_i\}_{i\in I} \cup \{\frac{\psi_\perp}{||\psi_\perp||}\}$ i widzimy, że $\{\phi_i\}_{i\in I}\}$ nie jest maksymalny.
2. $\Rightarrow$ 3. przykładamy $||\cdot||^2$ do obu stron 2.
3. $\Rightarrow$ 4. $\langle \phi_i, \psi\rangle = 0 \Rightarrow ||\psi||^2 = 0 \Rightarrow \psi = 0$.
4. $\Rightarrow$ 1. $\{\phi_i\}_{i\in I}$ nie jest maksymalny to istnieje $\psi \in H$ $||\psi|| = 1$ takie, że $\{\phi_i\}_{i\in I} \cup \{\psi\}$ jest układem ortonormalnym. W szczególności $\langle \phi_i, \psi\rangle = 0$ oraz $\psi \neq 0 -$ sprzeczność.

7 Wykład 10.04.2017

Przypomnienie 7.1. Zdefiniowaliśmy układy ortonormalne, bazy, itd. Przykładem jest $H = L^2[-\pi, \pi]$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. H posiada przeliczalną bazę.

Uwaga 7.2. Używając aksjomatu wyboru można pokazać, że każda przestrzeń Hilberta ma bazę ortonormalną.

Twierdzenie 7.3. Niech H będzie przestrzenią Hilberta oraz $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ będzie (przeliczalną) bazą. Jeśli $\{\psi_j\}_{j\in J}$ jest bazą H, to J jest zbiorem przeliczalnym.

Dowód. Ustalmy $k \in \mathbb{Z}$ i niech $J_k := \{j \in J : \langle \psi_j, \phi_k\rangle = 0\}$. Zauważmy, że J_k jest zbiorem przeliczalnym. Ponadto $J = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} J_k$. Rzeczywiście, gdyby J był zbiorem istotnie większym niż $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} J_k$, to istniałby wektor $\psi_j \notin J_k$, to znaczy $\langle \psi_j, \phi_k\rangle = 0\ \forall_{k\in\mathbb{Z}}$. Skoro $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ jest bazą, to takie ψ_j jest wektorem zerowym, co daje nam sprzeczność. W szczególności J jest zbiorem przeliczalnym. □

Definicja 7.4. Mówimy, że H jest przestrzrzenią ośrodkową, jeśli posiada ona przeliczalną bazę.

Fakt 7.5. Jeśli H jest przestrzenią ośrodkową, to H jest unitarnie izomorficzna z $l^2(\mathbb{N})$.

Dowód. Niech $\{\phi_j\}$ będzie bazą H. Wówczas $U : H \to l^2(\mathbb{N})$, gdzie dla $\psi \in H$ mamy:

$$(U\psi)_{n\in\mathbb{N}} := (\langle \phi_n, \psi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}.$$

□

Twierdzenie 7.6. (O rzucie ortogonalnym.) Niech $M \subset H$ będzie domkniętą podprzestrzenią wektorową oraz $M^\perp = \{\psi \in H : \psi \perp \phi\ \forall_{\phi\in M}\}$. Wówczas $\forall_{\psi\in H}$ istnieją $\psi_\parallel \in M$, $\psi_\perp \in M^\perp$, t. że $\psi = \psi_\parallel + \psi_\perp$. Ponadto takie $\psi_\parallel, \psi_\perp$ są wyznaczone jednoznacznie.

Dowód. M jest przestrzenią Hilberta. Niech $\{\phi_j\}_{j\in J}$ będzie ortonormalną bazą M. Definiujemy $\psi_\parallel = \sum_{j\in J}\langle\phi_j,\psi\rangle\phi_j$ oraz $\psi_\perp = \psi - \psi_\parallel$. Jednoznaczność wynika z równości $M \cap M^\perp = 0$. □

Uwaga 7.7. Mając $M \subset H$ jak wyżej definiujemy $\mathcal{P} : H \to H$, gdzie $\mathcal{P}\psi = \psi_\parallel$. Własności $\mathcal{P}$:

- $\mathcal{P}^2$=$\mathcal{P}$,
- $\langle\psi,\mathcal{P}\phi\rangle = \langle\mathcal{P}\psi,\phi\rangle$, ponieważ: $\langle\mathcal{P}\psi,\phi\rangle = \langle\psi_\parallel,\phi_\parallel+\phi_\perp\rangle = \langle\psi_\parallel,\phi_\parallel\rangle = \langle\psi,\mathcal{P}\phi\rangle$.

Operator $\mathcal{P}$ spełniający oba powyższe warunki nazywamy rzutem ortogonalnym.

Przykład 7.8. $H = L^2[-\pi,\pi], e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}, \{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – baza.
$M_N = \operatorname{span}\{e_{-N}, e_{-N+1}, ..., e_{N-1}, e_N\}$, $\dim M_N = 2N+1$.
$\mathcal{P}_N$ – rzut na M_N; $\psi \in H = L^2[-\pi,\pi]$; $\alpha \in [-\pi,\pi]$.

$$(\mathcal{P}_N\psi)(\alpha) = \sum_{k=-N}^{N}\langle\phi_k,\psi\rangle\phi_k(\alpha) = \sum_{k=-N}^{N}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ik\beta}\psi(\beta)\mathrm{d}\beta\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ik\alpha} =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N}e^{ik(\alpha-\beta)}\psi(\beta)d\beta = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-iN(\alpha-\beta)}}{2\pi}\frac{1-e^{-i(\alpha-\beta)(2N+1)}}{1-e^{i(\alpha-\beta)}}\psi(\beta)\mathrm{d}\beta =$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\frac{2N+1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})}\psi(\beta)\mathrm{d}\beta$$

Twierdzenie 7.9. (Riesza.) Niech $l : H \to \mathbb{C}$ będzie ciągłym funkcjonałem liniowym na H. Wówczas istnieje dokładnie jeden wektor $\psi \in H$ taki, że $\forall_{\phi\in H}$ mamy $l(\phi) = \langle\psi,\phi\rangle$.

Dowód. $\ker l = \{\psi : l(\psi) = 0\} \subset J$. Jądro operatora l jest podprzestrzenią domkniętą. Jeśli $\ker l = H$, to kładziemy $\psi = 0$. Jeśli $\ker l \neq H$, to wybieramy $\tilde{\psi} \in \ker l^\perp : ||\tilde{\psi}|| = 1$.
Zauważmy, że $\forall_{\phi\in H}\ l(\phi)\tilde{\psi} - l(\tilde{\psi})\phi \in \ker l$. W szczególności:

$$0 = \langle\tilde{\psi}, l(\phi)\tilde{\psi} - l(\tilde{\psi})\phi\rangle = l(\phi) - \langle\tilde{\psi}, l(\tilde{\psi})\phi\rangle = l(\phi) - \langle\overline{l(\tilde{\psi})}\tilde{\psi},\phi\rangle.$$

Czyli $l(\phi) = \langle\overline{l(\tilde{\psi})}\tilde{\psi},\phi\rangle$. Kładąc $\psi = \overline{l(\tilde{\psi})}\tilde{\psi}$ dostajemy <u>istnienie</u> ψ jak w treści twierdzenia.
Jedyność: jeśli $\psi_1,\psi_2 \in H$ spełniają są takie jak w tezie to $\langle\psi_1,\phi\rangle = \langle\psi_2,\phi\rangle$ dla wszystkich ϕ. Zatem $\langle\psi_1-\psi_2,\phi\rangle = 0$ i dla $\phi = \psi_1-\psi_2$ mamy $||\psi_1-\psi_2||^2 = 0$ i $\psi_1 = \psi_2$.

□

Wielomiany ortogonalne

Przypomnienie 7.10. Ortogonalizacja Gramma-Schmidta.

$\{\psi_1,...,\psi_n,...\}$ – zadany układ wektorów. $V_n = \operatorname{linspan}\{\psi_1,...,\psi_n\}$ i $\dim V_n = n$. Definiujemy układ <u>ortogonalny</u> $\{\phi_1,...,\phi_n,...\}$. W sposób indukcyjny:

1. $\phi_1 = \psi_1$,

2. mając $\{\phi_1, ..., \phi_{n-1}\}$ definiujemy $\phi_n = \psi_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \phi_i, \psi n\rangle \phi_n}{||\phi_i||}$.

Niech dany będzie odcinek $[a, b]$ oraz $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, (dopuszczamy możliwość $a = -\infty, b = \infty$) gdzie ρ – mierzalna taka, że: $\rho(x) > 0$, $x \in]a, b[$; ρ nazywamy wagą. Niech

$$H = L^2([a, b], \rho dx) = \{f : [a.b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) dx\}$$

Załóżmy, że $\int_a^b |x|^n \rho dx < \infty$. W szczególności $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\} \subset H$. V_n – przestrzeń wielomianów co najwyżej stopnia n.

Ortogonalizacji Gramm-Schmidta zastosowana do $\{1, x, x^2, ..., x^n, ...\} \rightsquigarrow \{P_0, ..., P_n, ...\}$ – układ ortogonalny, $\deg P_n = n$ oraz
$\langle P_k, P_l\rangle = 0 \ \forall_{k \neq l}$. Niech $p_n = \frac{P_n}{\|P_n\|} \rightsquigarrow \{p_0, ..., p_n, ...\}$ – układ ortonormalny. Do kwestii, kiedy $\{p_0, ..., p_n, ...\}$ jest bazą powrócimy później. Zauważamy, że p_n są wielomianami o współczynnikach rzeczywistych.

Niech k_n będzie współczynnikiem p_n przy najwyższej poędze x: $p_n(x) = k_n x^n +$ niższe potęgi. Dla $j, m \in \mathbb{N}$ definiujemy $\beta_{jm} = \langle p_j, x p_m\rangle$.

Stwierdzenie 7.11. 1. $\beta_{jm} = \beta_{mj}$ oraz $\beta_{jm} = 0, |j - m| \geqslant 2$,

2. $xp_n = \beta_{n+1,n} p_{n+1} + \beta_{n,n} p_n + \beta_{n-1,n} p_{n-1}$,

3. $\beta_{n+1,n} = \frac{k_n}{k_{n+1}}$

Dowód. 1. $\beta_{jm} = \int_a^b \rho(x) p_j(x) p_m(x) x dx = \int_a^b \rho(x) p_m(x) p_j(x) x dx = \beta_{mj}$; jeśli np.: $j \geqslant m + 2$, to $p_j \perp V_{m+1}$. Skoro $x p_m \in V_{m+1}$ to $x p_m \perp p_j$.

2. $xp_n = \sum_{k=0}^{n+1} \langle p_k, x p_n\rangle p_k = \beta_{n+1,n} p_{n+1} + \beta_{n,n} p_n + \beta_{n-1,n} p_{n+1}$,

3. $\langle p_{n+1}, x p_n\rangle = \langle p_{n+1}, k_n x^{n+1} + \text{wiel. stop. n}\rangle = \langle p_{n+1}, k_n x^{n+1}\rangle = \frac{k_n}{k_{n+1}} \langle p_{n+1}, k_{n+1} x^{n+1}\rangle =$
$= \frac{k_n}{k_{n+1}} \langle p_{n+1}, k_{n+1} x^{n+1} + u\rangle = \frac{k_n}{k_{n+1}} \langle p_{n+1}, p_{n+1}\rangle = \frac{k_n}{k_{n+1}}$.

gdzie u - wielomian n-tego stopnia taki, że $k_{n+1} x^{n+1} + u = p_{n+1}$

□

8 Wykład 24.04.2017

Uwaga 8.1. Waga $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}_+, \rho(s) > 0$ dla $s \in [a, b]$. Miara ρdx. Przestrzeń Hilberta $L^2([a, b], \rho dx) = \{f : [a, b] \to \mathbb{C} : \int_a^b /|f(s)/|^2 \rho dx < \infty\}$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \int_a^b |x|^n \rho dx < \infty,$$

czyli wielomiany tworzą podprzestrzeń wektorową w H. Ortogonalizację G-S zastosowano do

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$$

daje układ ortonormalny $\{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}$.

$$xp_n(x) = \beta_{n+1,n}p_{n-1}(x) + \beta_{n,n}p_n(x) + \beta_{n-1,n}p_{n-1}(x)$$

$$\beta_n = \frac{k_n}{k_{n+1}}, \text{ gdzie } k_n x^n + \text{wielomian st. } n-1.$$

Niech $V_n \subset H$ będzie podprzestrzenią wielomianów st. $\leqslant n$ i niech $P_{V_n} : H \to$ będzie rzutem ortogonalnym na V_n. Niech $f \in H$. Mamy

$$P_{V_n}f(x) = \sum_{j=0}^{n} p_j(x)(p_j|f) = \int_a^b \underbrace{\sum_{j=0}^{n} p_j(x)p_j(y)}_{\text{jądro całkowe } = P_{V_n}(x,y)} f(y)\rho(y)dy =$$

$$\int_a^b P_{V_n}(x,y)f(y)\rho(y)dy$$

Twierdzenie 8.2. (Wzór Christoffelo-Darboux)

$$P_{V_n}(x,y) = \begin{cases} \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} & x \neq y(*) \\ \frac{k_n}{k_{n+1}}(p_{n+1}p_n(x) - p_{n+1}p_n(x) & x = y(**) \end{cases}$$

Dowód.

$$(x-y)(p_j(x)p_j(y)) = \beta_{j+1,j}p_{j+1}(x)p_j(y) + \beta_{jj}p_j(x)p_j(y) +$$
$$\beta_{j-1,j}p_{j-1}(x)p_j(y) - \beta_{j+1,j}p_{j+1}(y)p_j(x) - \beta_{jj}p_j(y)p_j(x) - \beta_{j-1,j}p_{j-1}(y)p_j(x) =$$
$$\beta_{j+1,j}(p_{j+1}(x)p_j(y) - p_{j+1}(y)p_j(x)) - \beta_{j,j-1}(p_j(x)p_{j-1}(y) - p_j(y)p_{j-1}(x))$$

Sumując po j skracają się wszystkie wyrazy oprócz $\beta_{n+1,n}(p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)) = (x - y)p_{N_n}(x-y)$ skoro $\beta_{n+1,n} = \frac{k_n}{k_{n+1}}$ to dostajemy $(*)$; $(**)$ wynikają z $(*)$. □

Pytanie 8.3. Kiedy $\{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}$ tworzy bazę o.n.? Gdy zachodzi implikacja

$$(f \in H < x^k | f >= 0, k = 1, \dots) \implies (f = 0)$$

Twierdzenie 8.4. Niech ρ j.w. i przypuśćmy, że $\exists \epsilon > 0$ t.że $\int_a^b e^{\epsilon|x|}\rho dx < \infty$. Wówczas $\{p_0, p_1, \dots, p_n, \dots\}$ jest bazą p-ni $L^2([a,b], \rho) = H$

Dowód. Niech $z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im} z|| < \frac{\epsilon}{2}$ oraz niech $f \in H$. Wówczas $|\int_a^b f(x)e^{-ixz}\rho(x)dx| < \infty$. Rzeczywiście

$$\int_a^b |f(x)|\rho^{\frac{1}{2}}(x)|e^{-ixz}|\rho^{\frac{1}{2}}(x)dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b e^{\epsilon|x|}\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Rozważmy funkcję analityczną

$$z \longmapsto F(z) = \int_a^b f(x)e^{-ixz}\rho(x)dx,$$

gdzie

$$\frac{d}{dz}F(z) = \int_a^b f(x)(-ix)e^{-ixz}\rho(x)dx$$

Ogólniej

$$\frac{d^n}{dz^n}F(z) = \int_a^b f(x)(-ix)^n e^{-ixz}\rho(x)dx = (-i)^n < x^n|f >$$

Zatem jeśli $< x^n|f >= 0$ to $\frac{d^n}{dz^n}F(z)|_{z=0} = 0$ i z analityczności F dostajemy $F(z) = 0$ gdy $|\text{Im}z| < \frac{\epsilon}{2}$. W szczególności dla $t \in \mathbb{R}$ dostajemy zerowanie tr. Fouriera $\int_{\mathbb{R}}(f\rho\chi_{[a,b]})(x)e^{-itx}dx$ czyli $f\rho\chi_{[a,b]} = 0 \implies f = 0$ p.w. na $[a, b]$. □

Przykład 8.5. Wielomiany Czybyszewa

$$\cos(n\theta) \in L^2([0, \pi], d\theta), n \in \mathbb{N}$$

$$[0, \pi] \ni \theta \longmapsto \cos\theta \in [-1, 1]$$

Rozważmy odwzorowanie, które $f : [0, \pi] \to \mathbb{C}$ przypisuje $Uf : [-1, 1] \to \mathbb{C}$ dane wzorem $(Uf)(cos\theta) = f(a)$. U zadaje bijekcję między $L^2([0, \pi], d\theta)$ i $L^2([-1, 1], \sqrt{1 - x^2}dx)$. Jeśli $f(\theta) = \cos n\theta$ to

$$(Uf)(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Wielomiany Czybyszewa 1-go rodzaju

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$$

lub inaczej. Kładąc $x = \cos\theta$ mamy

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^n\right)$$

Wielomiany Czybyszewa spełniają równanie różniczkowe 2-go rzędu

$$\left((1 - x^2)\partial_x^2 - x\partial_x + n^2\right)T_n(x) = 0,$$

ponieważ

$$\partial_\theta^2 \cos n\theta + n^2 \cos n\theta = 0$$
$$\left(\partial_\theta^2 + n^2\right)\cos n\theta$$

Twierdzenie 8.6. Niech $C = \sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z$. Przypuśćmy, że istnieją wielomiany p_1, p_2 st. 1, 2 - odpowiednio oraz liczby $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ t.że $Cp_i = \lambda_i p_i$, $i = 1, 2$. Wówczas σ jest wielomianem st. co najwyżej 2 a τ jest wielomianem st. co najwyżej 1.

Dowód. Otrzymujemy

$$Cp_1 = \tau(z)p_1'(z) = \lambda_1 p_1.$$

Prawa strona jest co najwyżej wielomianem st. 1 oraz $p_1'(z) \neq 0$. Zatem τ jest wielomianem co najwyżej st. 1. Podobnie dowodzimy dla σ. □

9 Wykład 8.05.2017

Rozważmy operatory różniczkowe drugiego rzędu postaci

$$C = \sigma(z)\partial_z^2 + \tau(z)\partial_z,$$

gdzie σ jest wielomianem stopnia $\leqslant 2$, a τ jest wielomianem stopnia $\leqslant 1$. Najbliższe rozważania będą sprowadzały się do znalezienia wzoru na wielomian P_n stopnia n taki, że

$$CP_n = \lambda_n P_n.$$

Przykład 9.1. Jak wiemy z mechaniki kwantowej, wielomiany Hermite'a są wektorami własnymi operatora $C = \sigma(z)\partial_z^2 + 2z\partial_z$ i są wektorami własnymi hamiltonianu oscylatora harmonicznego.

Mając dane σ i τ rozważmy funkcję ρ spełniającą równanie

$$\sigma(z)\rho'(z) = (\tau(z) - \sigma'(z))\,\rho(z)$$

Zauważmy, że gdy w jest wielomianem, to mamy:

$$Cw = \sigma\partial_z^2 w + \tau\partial_z w = \sigma\partial_z^2 w + \sigma'\partial_z w + (\tau - \sigma')\partial_z w = \sigma\partial_z^2 w + \frac{1}{\rho}\sigma'\rho\partial_z w + \frac{1}{\rho}\sigma\rho'\partial_z w = \frac{1}{\rho}\partial_z\sigma\rho\partial_z w$$

Twierdzenie 9.2. Zdefiniujmy

$$P_n(\tau; z) := \frac{1}{n!}\frac{1}{\rho(z)}\partial_z^n \sigma^n(z)\rho(z).$$

Wówczas $P_n(\tau; z)$ jest wielomianem stopnia n oraz:

1) $CP_n(\tau; z) = (n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'')P_n(\tau; z)$

2) $\partial_z P_n(\tau; z) = (\tau' + \frac{(n-1)}{2}\sigma'')P_{n-1}(\tau + \sigma'; z)$

3) $(\sigma(z)\partial_z + \tau(z) - \sigma'(z))P_n(\tau; z) = (n+1)P_{n+1}(\tau + \sigma'; z)$

Dowód. Rozważmy operatory

$$a^- = \partial_z$$
$$a^+(\tau) = \sigma(z)\partial_z + \tau(z).$$

Wówczas operator C można zapisać jako

$$C = a^+(\tau)a^-,$$

oraz zachodzi

$$a^+ = \frac{1}{\rho}\partial_z\sigma\rho,$$

gdyż

$$\frac{1}{\rho}\partial_z\sigma\rho w = \sigma\partial_z w + (\tau - \sigma' + \sigma')w = \sigma\partial_z w + \tau w = a^+ w.$$

Z drugiej strony mamy

$$a^+(\tau)a^- - a^-a^+(\tau - \sigma') = -\tau' + \sigma'',$$

gdyż

$$\begin{aligned} a^-a^+(\tau-\sigma')w &= \partial_z(\sigma\partial_z + \tau - \sigma')w = \sigma\partial_z^2 w + \sigma'\partial_z w + (\tau - \sigma')\partial_z w + (\tau' - \sigma'')w = \\ &= Cw + (\tau' - \sigma'')w = a^+(\tau)a^- + (\tau' - \sigma'')w \end{aligned}$$

Przypuśćmy, że F jest wektorem własnym operatora $C(\tau + \sigma')$ o wartości własnej λ. Wówczas

$$Ca^+(\tau)F = a^+(\tau)a^-a^+(\tau)F = a^+\left(a^+(\tau+\sigma')a^- + \tau'\right)F = (\lambda + \tau')a^+(\tau)F.$$

Podobnie dowodzimy, że $a^+(\tau)a^+(\tau+\sigma')\cdot ... \cdot a^+(\tau+(n-1)\sigma')F$ jest wektorem własnym $C(\tau)$ o wartości własnej $\lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$.
Niech teraz $F = 1$. Wówczas $C(\tau)F = \sigma(z)\partial_z^2 1 + \tau(z)\partial_z 1 = 0$, czyli $\lambda = 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} -a^+(\tau) &= \frac{1}{\rho}\partial_z\sigma\rho \\ -a^+(\tau+\sigma') &= \frac{1}{\rho\sigma}\partial_z\sigma^2\rho, \end{aligned}$$

gdyż

$$\frac{1}{\rho\sigma}\partial_z\sigma^2\rho w = \sigma\partial_z w + (\tau - \sigma')w + \frac{2\sigma'\rho}{\sigma\rho}w = \sigma\partial_z + (\tau + \sigma')w.$$

Dalej

$$-a^+(\tau + (n-1)\sigma') = \frac{1}{\rho\sigma^{n-1}}\partial_z\sigma^n\rho,$$

a w szczególności dla $F = 1$ mamy:

$$a^+(\tau)a^+(\tau+\sigma')\cdot ... \cdot a^+(\tau+(n-1)\sigma')F = \frac{1}{\rho}\partial_z\sigma\rho\frac{1}{\sigma\rho}\partial_z\sigma^2\rho\cdot ... \cdot\frac{1}{\rho\sigma^{n-1}}\partial_z\sigma^n\rho 1 = \frac{1}{\rho}\partial_z^n\sigma^n\rho$$

Zatem $\frac{1}{\rho}\partial_z^n\sigma^n\rho$ jest wielomianem stopnia n. który jest wartością własną operatora $C(\tau)$ z wartością własną $n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$. Definiując $P_n(\tau; z) := \frac{1}{n!}\frac{1}{\rho(z)}\partial_z^n\sigma^n(z)\rho(z)$ łatwo sprawdzić, że wielomian ten spełnia także podpunkty 2. i 3. powyższego twierdzenia. □

Teraz niech bedą dane rzeczywiste wielomiany $\tau(x)$ i $\sigma(x)$. Przypuśćmy, że $\sigma\rho' = (\tau - \sigma')\rho$ oraz

1. $\rho \geqslant 0$ na $]a, b[$
2. $\sigma(a)\rho(a) = \sigma(b)\rho(b) = 0$

Rozważmy operator $C(\tau) = \frac{1}{\rho}\partial_x\sigma\rho\partial_x$ zdefiniowany na przestrzeni $\mathfrak{Pol}$ wielomianów dowolnego stopnia. Załóżmy, że $\mathfrak{Pol} \subset L^2([a,b],\rho)$. Wówczas

$$(u, Cw) = (Cu, w) \quad \forall_{u,w\in\mathfrak{Pol}},$$

gdyż

$$(u, C(\tau)w) = \int_a^b \rho(x)\overline{u(x)}\frac{1}{\rho(x)}\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x w(x)dx =$$

$$= -\int_a^b \left(\partial_x\overline{u(x)}\right)\sigma(x)\rho(x)\partial_x w(x) + \overline{u(b)}\sigma(b)\rho(b)\partial_x w(b) - \overline{u(a)}\sigma(a)\rho(a)\partial_x w(a) =$$

$$= \int_a^b \rho(x)\left(\frac{1}{\rho(x)}\partial_x\sigma(x)\rho(x)\partial_x\overline{u(x)}\right)w(x)dx = (C(\tau)u, w)$$

W szczególności, jeśli $Cu = \lambda u$, to

$$\lambda||u||^2 = (u, Cu) = (Cu, u) = \overline{\lambda}||u||^2.$$

Jeżeli zaś $Cu = \lambda u$ oraz $Cw = \mu w$ i $\lambda \neq \mu$, to $u \perp w$, gdyż

$$\lambda(w, u) = (w, Cu) = (Cw, u) = \mu(w, u) \Rightarrow (w, u) = 0.$$

Uwaga: jeśli $a = -\infty$, to warunek $\sigma(a)\rho(a) = 0$ zastępujemy warunkiem

$$\lim_{x\to-\infty}\sigma(x)\rho(x)x^n = 0 \quad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}$$

i analogicznie dla $b = +\infty$.

Przykład 9.3. Rozważmy operator C dla $\deg\sigma(x) = 0$ i $\tau(x) = Ax + B$. Wówczas

$$C = \partial_x^2 + (Ax + B)\partial_x$$

i po podstawieniu $y = \sqrt{\frac{|A|}{2}}(x + \frac{B}{A})$ otrzymujemy

$$C = \text{const}\begin{cases} \partial_y^2 + 2y\partial_y & \text{dla } A > 0 \\ \partial_y^2 - 2y\partial_y & \text{dla } A < 0 \end{cases}$$

W tym drugim przypadku $\rho(x)$ spełnia równanie

$$\rho' = -2y\rho,$$

czyli

$$\rho(y) = e^{-y^2}.$$

Jeżeli położymy $\sigma(y) = 1$, $[a, b] = [-\infty, +\infty]$ to bazą ortonormalną złożoną z wektorów własnych operatora C są wielomiany Hermite'a zdefiniowane wzorem

$$H_n(y) = \frac{1}{n!}\frac{1}{\rho}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\rho\sigma = \frac{1}{n!}e^{+y^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-y^2}.$$

10 Wykład 22.05.2017

Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta

0. Iloczyn tensorowy przestrzeni wektorowych

   V, W - przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{C}$ (ogólnie nad $\mathbb{F}$). Przedstawimy teraz konstrukcję $V \otimes W$.

Krok 1. Niech E będzie przestrzenią wektorową, której elementami są formalne kombinacje postaci:

$$\sum_{v\in V, w\in W} \alpha_{v,w}(v,w),$$

gdzie $\alpha_{v,w} \in \mathbb{C}$ oraz $\alpha_{v,w}$=0 dla prawie wszystkich $v \in V$, $w \in W$.

Krok 2. Niech $N \subset E$ będzie podprzestrzenią wektorową rozpiętą przez wektory postaci:

* $(v, w_1 + w_2) - (v, w_1) - (v, w_2)$,
* $(v_1 + v_2, w) - (v_1, w) - (v_2, w)$,
* $(v, \alpha w) - \alpha(v, w)$,
* $(\alpha v, w) - \alpha(v, w)$,

gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$; $v, v_1, v_2 \in V$; $w, w_1, w_2 \in W$.

Krok 3. $V \otimes W = E/N$; niech Π: $E \to V \otimes W$ będzie odwzorowaniem ilorazowym. Zauważmy, że odwzorowanie $V \times W \ni (v, w) \mapsto \Pi(v, w) \in V \otimes W$ jest 2-liniowe. Od tej pory oznaczymy $\Pi(v, w) := v \otimes w$, czyli mamy odwzorowanie 2-liniowe $\otimes : V \times W \to V \otimes W$.

★ Uniwersalna własność $\otimes : V \times W \to V \otimes W$

Niech U będzie przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$ oraz niech $T : V \times W \to U$ będzie odwzorowaniem 2-liniowym. Wówczas istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\tilde{T} : V \otimes W \to U$ takie, że $T(v, w) = \tilde{T}(v \otimes w)$. Takie odwzorowania możemy zaprezentować za pomocą diagramu przemiennego:

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\otimes"] & U \\ V \otimes W \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{T}"] & \end{tikzcd}$$

1. Sprzężenie zespolone przestrzeni Hilberta.

   Mamy $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$. Niech $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ jako zbiory. Dodawanie $\overline{\mathcal{H}}$ jest takie jak w $\mathcal{H}$. Natomiast mnożenie przez skalary - $\cdot : \mathbb{C} \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ modyfikujemy definiując $\odot : \mathbb{C} \times \overline{\mathcal{H}} \to \overline{\mathcal{H}}$ wzorem:

$$\alpha \odot \psi := \overline{\alpha} \cdot \psi$$

dla $\alpha \in \mathbb{C}$, $\psi \in \overline{\mathcal{H}}$. Następnie modyfikujemy iloczyn skalarny: niech $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\overline{\mathcal{H}}} : \overline{\mathcal{H}} \times \overline{\mathcal{H}} \to \mathbb{C}$ będzie iloczynem skalarnym dany wzorem $\langle\psi|\phi\rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \langle\phi|\psi\rangle_{\mathcal{H}}$.

2. Iloczyn tensorowy przestrzeni Hilberta.

   Niech $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ będą przestrzeniami Hilberta. Rozważmy przestrzeń wektorową $\mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$. Wykażemy, że na $\mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$ istnieje dokładnie jeden iloczyn skalarny $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}}$ taki, że:

$$\langle\psi_1 \otimes \phi_1|\psi_2 \otimes \phi_2\rangle_{\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}} = \langle\psi_1|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \langle\phi_1|\phi_2\rangle_{\mathcal{K}}.$$

   $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ definiujemy jako uzupełnienie $\mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$. Zajmiemy się teraz konstrukcją $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}}$.

   Dowód. Ustalmy $\psi_1 \in \mathcal{H}, \phi_1 \in \mathcal{K}$. Odwzorowanie $\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (\psi, \phi) \mapsto \langle\psi_1|\psi\rangle_{\mathcal{H}}\langle\phi_1|\phi\rangle_{\mathcal{K}} \in \mathbb{C}$ jest 2-liniowe. Zatem możemy zdefiniować funkcjonał liniowy Φ_{ψ_1,ϕ_2} na $\mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$ taki, że $\Phi_{\psi_1,\phi_2}(\psi \otimes \phi) = \langle\psi_1|\psi\rangle_{\mathcal{H}}\langle\phi_1|\phi\rangle_{\mathcal{K}}$.

   Niech $\mathcal{E}$ będzie przestrzenią funkcjonałów antyliniowych na $\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}$. W szczególności $\overline{\Phi_{\psi_1,\phi_1}} \in \mathcal{E}$ gdzie $\overline{\Phi_{\psi_1,\phi_1}}(\psi \otimes \phi) := \overline{\Phi_{\psi_1,\phi_1}(\psi \otimes \phi)}$. Zauważmy, że odwzorowanie $\mathcal{H} \times \mathcal{K} \ni (\psi_1, \phi_1) \mapsto \overline{\Phi_{\psi_1,\phi_1}} \in \mathcal{E}$ jest 2-liniowe, zatem istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe $\Xi : \mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K} \to \mathcal{E}$ takie, że $\Xi(\psi_1 \otimes \phi_1) = \overline{\Phi_{\psi_1,\phi_1}}$. Niech $\xi, \eta \in \mathcal{H} \otimes_{alg} \mathcal{K}$. Rozważmy $\overline{\Xi(\xi)(\eta)}$. Dla $\xi = \psi_1 \otimes \phi_1$ oraz $\eta = \psi_2 \otimes \phi_2$ mamy:

$$\overline{\Xi(\xi)(\eta)} = \overline{\overline{\Phi_{\psi_1,\phi_1}}(\psi_2 \otimes \phi_2)} = \overline{\overline{\langle\psi_1|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}}\langle\phi_1|\phi_2\rangle_{\mathcal{K}}}} = \langle\psi_1|\psi_2\rangle_{\mathcal{H}}\langle\phi_1|\phi_2\rangle_{\mathcal{K}}$$

   Czyli dostajemy, że $\langle\xi|\eta\rangle_{\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}} = \overline{\Xi(\xi)(\eta)}$. □

★ Dodatniość

Dowód. $\xi = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \otimes \phi_i$, gdzie $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ jest liniowo niezależnym układem wektorów. Bez straty ogólności (ortogonalizacja G-S) zakładamy, że $\{\phi_i\}_{i=1}^{n}$ jest układem ortonormalnym wektorów. Wówczas:

$$\langle\xi|\xi\rangle_{\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle\psi_i \otimes \phi_i|\psi_j \otimes \phi_j\rangle_{\mathcal{H}\otimes_{alg}\mathcal{K}} = \sum_{i,j=1}^{n} \langle\psi_i|\phi_j\rangle\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} ||\phi_i||^2 > 0.$$

Widzimy więc, że mamy dodatniość. □

Zadanie

Niech (X, Σ_X, μ_X) oraz (Y, Σ_Y, μ_Y) będą przestrzeniami σ-skończonymi takimi, że $L^2(X, \mu_X)$ i $L^2(Y, \mu_Y)$ są ośrodkowe. Pokazać, że $L^2(X, \mu_X) \otimes L^2(Y, \mu_Y) \cong L^2(X \times Y, \mu_X \otimes \mu_Y)$, gdzie symbol "$\cong$" oznacza izomorfizm U taki, że

dla $\psi \in L^2(X, \mu_X), \phi \in L^2(Y, \mu_Y)$ $u(\psi \otimes \phi) \in L^2(X \times Y, \mu_X \otimes \mu_Y)$, gdzie

$$(u(\psi \otimes \phi))(x, y) = \psi(x)\phi(y)$$

10.1 C^* – algebra operatorów na przestrzeni Hilberta

$\mathcal{H}$ – przestrzeń Hilberta, $B(\mathcal{H})$ – algebra operatorów liniowych ciągłych na $\mathcal{H}$. Na przykład, gdy $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, to $B(\mathcal{H}) = M_n(\mathbb{C})$.

Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$, to $\|T\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|T\psi\| = \sup_{\|\psi\|,\|\phi\|=1} |\langle\phi|T\psi\rangle$. Ostatnia równość wynika stąd, że $\|\xi\| = \sup_{\|\eta\|=1} |\langle\eta|\xi\rangle|$ dla $\xi \in \mathcal{H}$. Ponadto dla $T, S \in B(\mathcal{H})$ $\|T \cdot S\| \leqslant \|T\| \cdot \|S\|$.

11 Wykład 29.05.2017

$B(\mathcal{H})$ - algebra operatów ograniczonych na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, $\|\cdot\|$, $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$

Przykład 11.1. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}), f \in L^\infty(\mathbb{R})$, $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ to $f\Psi \in L^2(\mathbb{R})$
$L^2(\mathbb{R}) \ni \Psi \xrightarrow{T} f\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ jest liniowy $\|T\| = \|f\|_\infty$

11.1 Hermitowskie sprzężenie operatora ograniczonego.

Niech $T \in B(\mathcal{H})$ oraz $\Psi \in \mathcal{H}$. Wówczas odwzorowanie $\mathcal{H} \ni \Phi \mapsto (\Psi|T\Phi) \in \mathbb{C}$ jest funkcjonałem liniowym ciągłym. Zatem $\exists! \tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$ t. że $(\Psi|T\Phi) = (\tilde{\Psi}|\Phi)$ - wniosek z lematu Riesza. Mamy więc odwzorowanie liniowe $\mathcal{H} \ni \Psi \mapsto \tilde{\Psi} \in \mathcal{H}$, które oznaczamy symbolem T^* takie, że $(\Psi|T\Phi) = (T^*\tilde{\Psi}|\Phi)$. Podstawowe własności $*$:

1. $(T + R)^* = T^* + R^*$
2. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
3. $(TR)^* = R^*T^*$
4. $T^{**} = T$

Przykład 11.2. $T\Psi = f\Psi$; $(\Psi|T\Phi) = \int_{\mathbb{R}} \overline{\Phi(t)} f(t)\Psi(t)dt = \int_{\mathbb{R}} \overline{\overline{f(t)}\Phi(t)}\Psi(t)$, a więc
$T^*\Phi(t) = \bar{f}(t)\Phi(t)$

Stwierdzenie 11.3. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Dowód. Zauważamy, że
$$\|\Phi\| = \sup_{\|\tilde{\Phi}\|=1} |\langle \tilde{\Phi}|\Phi\rangle|$$

W szczególności

$$\begin{aligned}
\|T^*T\| &= \sup_{\|\Psi\|=1} \|T^*T\Psi\| \\
&= \sup_{\substack{\|\Psi\|=1 \\ \|\Phi\|=1}} |\langle \Phi|T^*T\Psi\rangle| \\
&\geqslant \sup_{\|\Psi\|=1} |<\Psi|T^*T\Psi>| \\
&= \sup_{\|\Psi\|=1} \|T\Psi\|^2 = \|T\|^2
\end{aligned}$$

Stąd
$$\|T^*\| \cdot \|T\| \overset{\star}{\geqslant} \|T^*T\| \geqslant \|T^2\| \Rightarrow \|T^*\| \geqslant \|T\|$$

Zamieniając T na T^* mamy $\|T\| \geqslant \|T^*\| \Rightarrow \|T\| = \|T^*\|$.
Wstawiając do $\star$ mamy $\|T^2\| \geqslant \|T^*T\| \geqslant \|T\|^2$. □

Definicja 11.4. Niech $T \in B(\mathcal{H})$. **Zbiorem rezolwentowym** operatora T nazywamy $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : z\mathbb{1} - T$, jest odwracalny$\}$ i oznaczamy $\rho(T)$. $\mathbb{C} \setminus \rho(T)$ nazywamy spektrum T i oznaczamy $\sigma(T)$.

Stwierdzenie 11.5. Jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ to $\sigma(T)$ jest niepustym zwartym podzbiorem $\mathbb{C}$.

Dowód. Zwartość = domkniętość i ograniczoność.
Zbiór rezolwentowy jest otwarty: zbiór operatorów odwracalnych jest otwarty w $B(\mathcal{H})$ a $\rho(T)$ jest przeciwobrazem tego zbioru przy odwzorowaniu ciągłym $\mathbb{C} \ni z \mapsto z\mathbb{1} - T \in B(\mathcal{H})$. Spektrum jest zbiorem ograniczonym: $(z\mathbb{1} - 1) = z(1 - \frac{T}{z})$. Jeśli $\|\frac{T}{z}\| = \frac{\|T\|}{\|z\|} < 1$ to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{z^n}$ jest zbieżny do $(1 - \frac{T}{z})^{-1}$. Czyli dla $|z| > \|T\|$, $(z\mathbb{1} - T)$ jest odwracalny i $(z\mathbb{1} - 1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}T^n$. Niepustosć spektrum: przypuśćmy, że $\sigma(T) = \varnothing$ i rozważmy odwzorowanie $\mathbb{C} \ni z \mapsto (z\mathbb{1} - T)^{-1} \in B(\mathcal{H})$. Jest ono holomorficzne, określona na całym $\mathbb{C}$, a więc z tw. Liouville'a jest ono stałe - sprzeczność. $\square$

Definicja 11.6. Niech $T \in B(\mathcal{H})$. Wówczas $\sup\{|z| : z \in \sigma(T)\}$ nazywamy **promieniem spektralnym** i oznaczamy $r(T)$.

Uwaga 11.7. $r(T) \leqslant \|T\| \Rightarrow$ jeśli $|z| > \|T\|$ to $(z\mathbb{1} - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1}T^n$. Wzmocnienie tego faktu: $r(T) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$. Można pokazać, że ciąg $\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ jest zbieżny oraz $r(T) = \lim \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Przykład 11.8. Jeśli $T^* = T$ to $\sigma(T) \in \mathbb{R}$

1. $\ker T^* = \mathrm{Im}(T)^{\perp}$

$$\begin{aligned}\Psi \in \ker T^* &\Leftrightarrow \forall_{\Phi \in \mathcal{H}} (T^*\Psi|\Phi) = 0\\ &\Leftrightarrow (\Psi|T\Phi) = 0, \Phi \in \mathcal{H}\\ &\Leftrightarrow \Psi \perp \mathrm{Im}(T)\end{aligned}$$

2. Jeśli $T^* = T$ to $\|(T \pm i)\Psi\| \geqslant \|\Psi\|$.

$$\begin{aligned}\|(T \pm i)\Psi\|^2 =& \langle (T+i)\Psi|(T+i)\Psi\rangle = \|T\Psi\|^2 + \|\Psi\|^2 + i\langle T\Psi|\Psi\rangle - i\langle \Psi|T\Psi\rangle\\ \geqslant& \|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

Stąd:

- $T \pm i$ są różnowartościowe.
- Podprzestrzenie $\mathrm{Im}(T \pm i)$ są domknięte w $\mathcal{H}$. Rzeczywiście, niech $\Psi_n \in \mathcal{H}$ oraz $\Phi = \lim_{n\to\infty}(T + i)\Psi_n$. $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego gdyż $\|\Psi_n - \Psi_m\| \leqslant \|(T+i)(\Psi_n - \Psi_m)\|$. Niech $\Psi = \lim \Psi_n \Rightarrow \Phi = (T+i)\Psi \in \mathrm{Im}(T+i)$.
- $\mathrm{Im}(T+i) = \mathcal{H}$, $\mathrm{Im}(T+i)^{\perp} = \ker(T-i) = \{0\}$
- $\|\Psi\|^2 = \|(T+i)(T+i)^{-1}\Psi\|^2 \geqslant \|(T+i)^{-1}\Psi\|^2 \Rightarrow \|T+i\| \leqslant 1$

Uwaga 11.9. sprawdzenie d) nie jest konieczne. Zachodzi następujące tw: jeśli $T \in B(\mathcal{H})$ jest odwracalny w sensie algebraicznym to odwrotny jest ciągły: $T^{-1} \in B(\mathcal{H})$

11.2 Operatory nieograniczone

Przykład 11.10. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją mierzalną. Rozważmy $D(T) = \{\Psi \in L^2(\mathbb{R}) : f \cdot \Psi \in L^2(\mathbb{R})\}$. Zauważmy, że $D(T)$ jest podprzestrzenia liniową gęstą w $L^2(\mathbb{R})$. Gęstość: niech $\Omega_n = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \leqslant n\}$. Wówczas $\Omega_n \nearrow_{n\to\infty} \mathbb{R}$. Dla $\Psi \in L^2(\mathbb{R}), \chi_{\Omega_n}\Psi \in L^2(\mathbb{R})$. Ponadto $\chi_{\Omega_n}\Psi \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi$ w $L^2(\mathbb{R})$ (z tw. Lebesguea o zbieżności zmajoryzowanej). Rozważmy operator

$$T : D(T) \to \mathcal{H}, T\Psi = f\Psi$$

Niech $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T)$. Operator T ma następującą własność:

$$\begin{array}{l} \Psi = \lim\limits_{n\to\infty} \Psi_n \\ \text{ciąg } T\Psi_n \text{ jest zbieżny} \end{array} \Rightarrow \Psi \in D(T) \text{ oraz } T\Psi = \lim_{n\to\infty} T_{\Psi_n}$$

Mówimy, że T jest operatorem domkniętym.

12 Wykład 5.06.2017

12.1 Operatory nieograniczone

Przykład 12.1. Rozważmy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = L^2[0, 2\pi]$ oraz jej podprzestrzeń liniową gęstą $D = \{f \in C^1[0, 2\pi] : f(0) = f(2\pi) = 0\} \subset \mathcal{H}$. Zdefiniujmy operator $A_0 : D \to \mathcal{H}$ wzorem

$$A_0 f = -if'$$

Od razu widać, że zachodzi

$$(g|A_0 f) = \int_0^{2\pi} \overline{g(x)}(-i)f'(x)dx = -i\overline{g(x)}f'(x)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \overline{-ig'(x)}f(x)dx = (A_0 g|f),$$

czyli A_0 jest operatorem symetrycznym.

Operatory nieograniczone są zdefiniowane na dziedzinie $D \subset \mathcal{H}$, gdzie będziemy zakładać, że D jest podprzestrzenią wektorową. Zazwyczaj będzie to gęsta podprzestrzeń. Dla liniowego operatora $T : D \to \mathcal{H}$ będziemy stosować oznaczenie $D(T) = D$. Wykresem operatora T nazywamy podprzestrzeń $G(T) \subset \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$, gdzie

$$G(T) = \left\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} : \xi \in D, \eta = T\xi \right\}.$$

Definicja 12.2. Jeśli $G(T)$ jest podprzestrzenią domkniętą, to mówimy, ze T jest operatorem domknietym.

Stwierdzenie 12.3. Niech $G \subset \mathcal{H} \bigoplus \mathcal{H}$. Wówczas G jest wykresem operatora wtedy i tylko wtedy, gdy G nie zawiera wektorów postaci $\begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix}$ dla $\eta \neq 0$.

Dowód. $\Rightarrow$) Przypuśćmy, że $\begin{bmatrix} 0 \\ \eta \end{bmatrix} \in G$ skoro $T(0) = 0$ to $\eta = 0$.
$\Leftarrow$) $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \xi \\ \eta_2 \end{bmatrix} \in G \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi \\ \eta_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \xi \\ \eta_2 \end{bmatrix} \in G \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi \\ \eta_1 - \eta_2 \end{bmatrix} \in G \Rightarrow \eta_1 = \eta_2$, stąd T jest dobrze zdefiniowany wzorem $T\xi = \eta$, gdzie $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in G$, a $D(T) = \begin{bmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} G$. □

Definicja 12.4. Mówimy, że T jest operatorem domykalnym, jeśli $\overline{G(T)}$ jest wykresem pewnego operatora. Wówczas operator ten nazywamy domknięciem operatora T i oznaczamy $\overline{T}$. Innymi słowy $\overline{G(T)} = G(\overline{T})$

Uwaga 12.5. 1) T jest domknięty $\Leftrightarrow$ T spełnia następujace warunki:
jeżeli $\psi_n \in D(T), \lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi$ oraz $\lim_{n\to\infty} T\psi_n = \phi$, to $\psi \in D(T)$ oraz $T(\psi) = \phi$.
Zachodzi także twierdzenie o wykresie domkniętym, mówiące, że domknięty operator określony na całej przetrzeni Hilberta jest ciągły.

2) T jest domykalny $\Leftrightarrow$ T spełnia
$\Big((\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(T),\ \lim_{n\to\infty} \psi_n = \phi \wedge \lim_{n\to\infty} T\psi_n = 0\Big) \Rightarrow \phi = 0$.

Zdefiniujmy teraz pojęcie operatora sprzężonego dla operatorów nieograniczonych. Załóżmy, że $D(T)$ jest gęsta w $\mathcal{H}$. Wówczas definiujemy

$$D(T^*) = \{\xi \in \mathcal{H} : \exists_{\eta\in\mathcal{H}}\, \forall_{\psi\in D(T)}\ (\xi|T\psi) = (\eta|\psi)\}$$

Uwaga 12.6. Dla $\xi \in D(T^*)$ istnieje dokładnie jedna η jak powyżej. Rzeczywiście, jeśli η_1 i η_2 spełniają spełniają powyższy warunek, to $(\eta_1|\psi) = (\xi|T\psi) = (\eta_2|\psi) \Rightarrow \eta_1 - \eta_2 \perp D(T) \Rightarrow \eta_1 = \eta_2$.

Wykres operatora sprzężonego do T jest dany wzorem

$$G(T^*) = \Big\{ \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} : \xi \in D(T^*) \wedge (\xi|T\psi) = (\eta|\psi) \Big\}.$$

Powyższe rozważania nasuwają dwie obserwacje:

1) $\xi \in D(T^*) \Leftrightarrow$ funkcjonał $D(T) \ni \psi \mapsto (\xi|T\psi) \in \mathbb{C}$ jest ciągły

2) $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in G(T^*) \Rightarrow \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \perp \Big\{ \begin{bmatrix} T\psi \\ -\psi \end{bmatrix} :\ \psi \in D(T) \Big\} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} G(T)$, zatem $G(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} G(T)^\perp$

Twierdzenie 12.7. Niech $T : D(T) \to \mathcal{H}$ będzie gęsto zdefiniowany. Wówczas T^* jest gęsto zdefiniowany wtedy i tylko wtedy, gdy T jest domykalny.

Dowód. T^* jest gęsto zdefiniowany, gdy jedynym wektorem postaci $\begin{bmatrix} \psi \\ 0 \end{bmatrix}$ prostopadłym do $G(T^*)$ jest wektor zerowy. Rzeczywiście, $\left(\begin{bmatrix} \psi \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \right) = (\psi|\xi) = 0$ dla każdego $\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \in G(T^*)$ i równoważnie $(\psi|\xi) = 0$ dla każdego $\xi \in D(T^*)$. Zauważmy, że $G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} G(T^*)^\perp$. Na mocy domykalności T jedynym wektorem postaci $\begin{bmatrix} 0 \\ \psi \end{bmatrix} \in \overline{G(T)}$ jest wektor zerowy i widzimym, że jedynym wektorem postaci $\begin{bmatrix} \psi \\ 0 \end{bmatrix}$ prostopadłym do $G(T^*)$ jest wektor zerowy. To rozumowanie można poprowadzić w drugą stronę otrzymując równoważność. $\square$

Definicja 12.8. Jeżeli operatory T i S są takie, że zachodzi $G(T) \subset G(S)$, to mówimy, że S jest rozszerzeniem T i piszemy $T \subset S$.
Mówimy, że T jest operatorem symetrycznym, jeśli $T \subset T^*$.
Mówimy, że T jest samosprzężony, gdy $T = T^*$.

Uwaga 12.9. 1) T^* jest operatorem domkniętym, bo $G(T^*) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} G(T)^\perp$ jest podprzestrzenią domkniętą. Także $G(T^{**}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{bmatrix} G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} = G(\overline{T}) \Rightarrow T^{**} = \overline{T}$.

2) Jeżeli $T \subset S$ oraz S jest domknięty, to T jest domykalny.

3) Jeżeli T jest symetryczny, to T jest domykalny, bo $T \subset T^*$, który jest domknięty.

Przykład 12.10. Niech $A_0 f = -if'$. Wiemy już, że A_0 jest symetryczny. Wyznaczmy operator do niego sprzężony. Niech $\psi \in D(A_0^*)$. Wówczas istnieje $\phi \in L^2[0, 2\pi]$ taki, że

$$\int_0^{2\pi} \overline{\psi(x)} A_0 f(x) dx = \int_0^{2\pi} \overline{\psi(x)} (-i) f'(x) dx = \int_0^{2\pi} \overline{\phi(x)} f(x) dx =$$
$$= \left(\int_0^x \overline{\phi(t)} dt \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \int_0^x \overline{\phi(t)} dt f'(x) dx,$$

a stąd

$$\int_0^{2\pi} \overline{\left(\psi(x) - i \int_0^x \phi(t) dt \right)} f'(x) = 0$$

i równoważnie

$$\psi(x) - i \int_0^x \phi(t) dt \in \{f' : \ f \in D(A_0)\}^\perp = \mathbb{C}\mathbb{1}, \tag{5}$$

gdyż $\{f' : \ f \in D(A_0)\} = \{h \in C[0, 2\pi] : \ \int_0^{2\pi} h(t) dt = 0\} = \{\mathbb{1}\}^\perp$. Możemy się o tym przekonać sprawdzając, że

$$\int_0^{2\pi} f'(x) dt = \int_0^{2\pi} f'(x) dt = f(2\pi) - f(0) = 0.$$

Ostatecznie, korzystając z równości (5) otrzymujemy, że

$$\psi(x) = \psi(0) + i \int_0^x \phi(t) dt,$$

zatem

$$\phi(x) = -i\psi'(x),$$

czyli

$$D(A_0^*) = \{\psi \in C[0, 2\pi] : \ \psi'(x) \in L^2[0, 2\pi]\}.$$

Widać zatem, że działanie operatorów A_0 i A_0^* jest zdefiniowane tym samym wzorem, ale mają one inne dziedziny i przez to $A_0 \subset A_0^*$, ale $A_0 \neq A_0^*$.