Rozwiązanie zadanie 2 z egzaminu.

Zadanie 2. Całkując odpowiednio dobraną funkcję holomorficzną po odpowiednio dobranym konturze obliczyć całkę

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin x}{(x^2+9)^2} dx.$$

Rozw. Zauważmy, że dzięki parzystości funkcji $\frac{x \sin x}{(x^2+9)^2}$

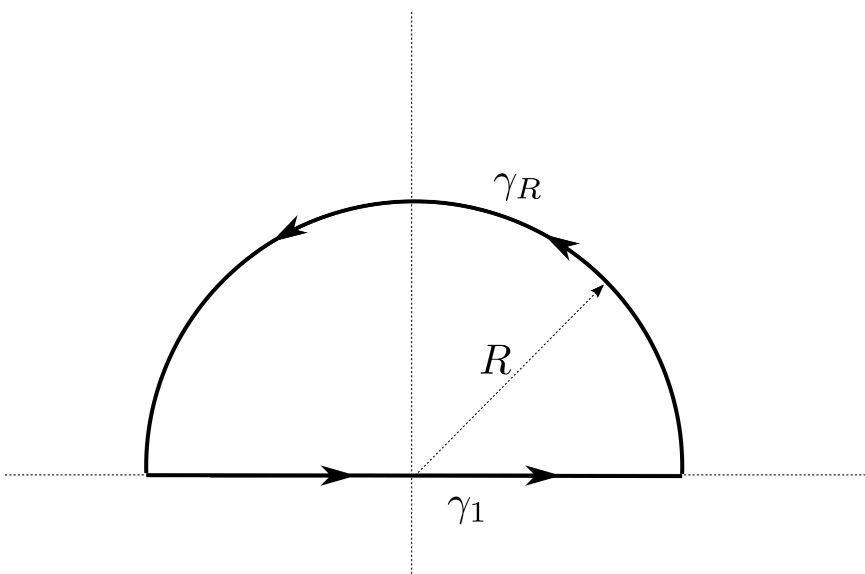
$$\int_0^\infty dx \frac{x \sin x}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x \sin x}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x e^{ix}}{(x^2+9)^2}, \tag{1}$$

bowiem $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$. Naszą funkcją będzie

$$f(z) = \frac{z e^{iz}}{(z^2+9)^2}. \tag{2}$$

Całkujemy ją po konturze górnego półokręgu

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_R, \quad \gamma_1(t) = t,\ t \in [-R, R], \quad \gamma_R(\phi) = Re^{i\phi},\ \phi \in [0, \pi]. \tag{3}$$



Rysunek 1: Kontur całkowania.

Zgodnie z lematem Jordana (tutaj można też elementarnie oszacować)

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} dz f(z) = 0 \tag{4}$$

Dodatkowo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} dz f(z) = \int_{-\infty}^\infty dx \frac{x e^{ix}}{(x^2+9)^2}. \tag{5}$$

Funcja $f(z)$ ma residua w miejcach zerowych mianownika

$$(z^2+9)^2 = [(z-3i)(z+3i)]^2 = (z-3i)^2(z+3i)^2 \tag{6}$$

czyli mamy dwa residua 2-go rzędu w punktach $\pm 3i$. Tylko residuum w punkcie $3i$ jest wewnątrz konturu dla dostatecznie dużego R. Wzór Cauchy'ego przyjmuje postać

$$\lim_{R\to\infty} \int_\gamma dz f(z) = 2\pi \operatorname{Res}_{3i} f(z) \tag{7}$$

Obliczamy

$$\operatorname{Res}_{3i} f(z) = \lim_{z\to 3i} \frac{d}{dz}\left[(z-3i)^2 f(z)\right] = \frac{d}{dz}\left[\frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}\right]\Bigg|_{z=3i} = \frac{e^{iz}+ize^{iz}}{(z+3i)^2} - \frac{2ze^{iz}}{(z+3i)^3}\Bigg|_{z=3i} = \frac{e^{-3}}{12}. \tag{8}$$

Ostatecznie dostajemy

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{xe^{ix}}{(x^2+9)^2} = 2\pi i \frac{e^{-3}}{12} = i\frac{\pi e^{-3}}{6}. \tag{9}$$

Nasza całka wynosi

$$\int_0^\infty dx \frac{x\sin x}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{xe^{ix}}{(x^2+9)^2} = \frac{\pi e^{-3}}{12}. \tag{10}$$

Uwagi: Nie możemy całkować po półokręgu fukcji $\frac{z\sin z}{(z^2+9)^2}$ bowiem po γ_R całka nie znika. Całka po dziurce od klucza nie ma tu sensu.

□