Zadania z teorii dystrybucji

Zad 1 Niech $\Theta(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a. Oblicz:

(a) $T_f'' + a^2 T_f$ dla $f(x) = \Theta(x)\sin(ax)$

(b) $(T_g)^{(n)}$ jeśli $g(x) = \Theta(x)\cdot x^{n-1}$ $n \in \mathbb{N}$

(c) $T_h' - aT_h$ jeśli $h(x) = \Theta(x)e^{ax}$

(d) T_k'' jeśli $k(x) = \Theta(x)|x|^{\frac{1}{2}}$

Zad 2 Znaleźć wszystkie dystrybucje $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t. że (a) $x^2 T = 0$ ($xT = 0$ – było na wykł)

(b) $xT' = 1$ (na wykładzie $T_{\log|x|}' = P(\frac{1}{x})$)

Zad 3 Wykazać wzory Sochockiego

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = P\left(\frac{1}{x}\right) \mp i\pi\delta$$

Zad 4

12. Dowieść, że: (a) $\lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{r^3}(\delta_{3r} - 3\delta_{2r} + 3\delta_r - \delta_0) = \delta_0''$; (b) $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{rx}{(x^2+r^2)^2} = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$; (c) $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{r^3 x}{(x^2+r^2)^3} = -\frac{\pi}{8}\delta'(x)$.

(a) Można zastos. de l'Hospitala do $\lim\limits_{r\to 0} \frac{1}{r^3}(\varphi(3r) - 3\varphi(2r) + 3\varphi(r) - \varphi(0)) = \varphi''(0)$. (b) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+1)} =: f(x)$; skoro $\int f(x)dx = -\frac{\pi}{2}$, to $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{1}{r} f(\frac{x}{r}) = -\frac{\pi}{2}\delta(x)$ oraz $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{1}{r^2} f'(\frac{x}{r}) = -\frac{\pi}{2}\delta'(x)$. (c) $f(x) := -\frac{1}{4(x^2+1)^2}$, wtedy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\frac{\pi}{8}$, więc $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{1}{r} f(\frac{x}{r}) = -\frac{\pi}{8}\delta(x)$, skąd $\lim\limits_{r\searrow 0} \frac{1}{r^2} f'(\frac{x}{r}) = \lim\limits_{r\searrow 0} \frac{r^3 x}{(x^2+r^2)^3} = -\frac{\pi}{8}\delta'(x)$.

Zad 5* Wykazać, że jeśli $r(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ to $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\,\delta(x,y,z)$.