Wykłady 10,...,20

1 Równania różniczkowe zwyczajne

1.1 Wstęp. Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

1.1.1 Przykłady

1. Rozpad promieniotwórczy

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad N(t_0) = N_0.$$

Rozwiązanie: $N(t) = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$.

2. Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad x(0) = x_0,\ \dot{x}(0) = v_0.$$

3. Równanie Schrödingera

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

Pierwsze dwa równania są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi – odpowiednio pierwszego i drugiego rzędu, trzecie jest równaniem różniczkowym cząstkowym.

Przyjrzyjmy się trochę dokładniej równaniu oscylatora harmonicznego. Stosując podstawienie $\dot{x} = v$ sprowadzamy to równanie do układu równań pierwszego stopnia:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & v, \\ \dot{v} & = & -\omega^2 x, \qquad x(0) = x_0, v(0) = v_0. \end{array}\right.$$

Uogólnieniem tej sytuacji jest zagadnienie zwane zagadnieniem początkowym albo zagadnieniem Cauchy. Szukamy funkcji $\mathbb{R} \ni t \mapsto x(t) \in X$, gdzie X jest przestrzenią wektorową (będziemy się zajmowali tylko przestrzeniami skończenie wymiarowymi) z iloczynem skalarnym, spełniającej równanie różniczkowe wraz z warunkami początkowymi:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0, \quad \text{gdzie} \quad f : \mathbb{R} \times X \to X, \quad x_0 \in X.$$

Przykłady będą na wykładzie. Całkując stronami to równanie na odcinku $[t_0, t]$ i uwzględniając warunek początkowy (zakładamy, że f jest funkcja ciągłą) otrzymujemy:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{1}$$

Zauważmy, że równanie (1) jest równoważne całemu zagadnieniu Cauchy, czyli równaniu różniczkowemu razem z warunkiem początkowym.

Do zbadania istnienia i jednoznaczności rozwiązania tego równania zastosujemy metodę kolejnych przybliżeń. Polega ona na tym, że funkcji $y(\cdot)$ przypisujemy nową funkcję według wzoru po prawej stronie równania (1):

$$F(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\, ds.$$

Przy odpowiednich założeniach dotyczących funkcji f i przedziału, na którym poszukuje się rozwiązania okaże się, że F jest odwzorowaniem zbliżającym.

Twierdzenie 1 *Niech X będzie skończenie wymiarową przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym, a $f : \mathbb{R} \times X \to X$ funkcją ciągłą. Jeśli ponadto dla wszystkich $t \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ oraz $x, x' \in K(x_0, \rho)$ spełnione są następujące warunki*

$$||f(t,x)|| \leq M \quad \textit{oraz}$$

$$\exists_{L \in \mathbb{R}} ||f(t,x) - f(t,x')|| \leq L||x - x'|| \quad \textit{(warunek Lipschitza),}$$

to istnieje takie $\tau > 0$, że w przedziale $]t_0 - \tau, t_0 + \tau[$ równanie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Dowód (metoda Picarda). Jako zbiór, w którym działa F bierzemy kulę domkniętą o promieniu r, której środkiem jest funkcja stała o wartości x_0 w przestrzeni funkcji ciągłych na odcinku $[t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, przy czym r i τ wybierzemy później. Rozważamy więc zbiór $A := \{x(\cdot) \in C([t_0 - \tau, t_0 + \tau] : \sup_{t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]} ||x(t) - x_0|| \leq r\}$. Z tego, co wiemy o zbieżności jednostajnej funkcji ciągłych, A jest przestrzenią metryczna zupełną. Oczywiste jest, że rozwiązanie równania (1) to to samo, co punkt stały odwzorowania F. Musimy sprawdzić dwie rzeczy:

1. Czy F odwzorowuje A w A,
2. Czy F jest odwzorowaniem zbliżającym.

ad 1. Niech $x(\cdot) \in A$. Obliczamy

$$d(F(x(\cdot)), x_0) = \sup_{|t - t_0| \leq \tau} ||x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - x_0|| =$$

$$= \sup_{|t - t_0| \leq \tau} ||\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds - x_0|| \leq M\tau$$

Jeśli dobierzemy τ tak, że by $M\tau \leq r$ to $F(x(\cdot)) \in A$.

ad2. Niech $x(\cdot), x'(\cdot) \in A$. Obliczamy

$$d(F(x(\cdot), x'(\cdot))) = \sup_{|t - t_0| \leq \tau} ||\int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, x'(s))\, ds|| \leq$$

$$\leq \tau \cdot \sup_{|s-t_0|\leq\tau} ||x(s) - x'(s)|| \leq \tau L d(x(\cdot), x'(\cdot)).$$

Jeśli $L\tau < 1$, to odwzorowanie F jest zbliżające. Zbierając wszystkie warunki nałożone na τ czyli $\tau < \min\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}, \epsilon\}$, przy czym $r \leq \rho$ mamy spełnione warunki twierdzenia o odwzorowaniach zbliżających, co kończy dowód.

Uwagi. Metoda kolejnych przybliżeń zastosowana tutaj doskonale nadaje się do dowodu, natomiast nie bardzo nadaje się do przybliżonego rozwiązywania równań ze względu na powolną zbieżność. Udowodniliśmy jednak trochę więcej niż samo twierdzenie, ponieważ mamy nie tylko *istnienie* przedziału, w którym rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne, ale też oszacowanie od dołu długości tego przedziału. Jeśli na przykład funkcja f będzie ograniczona na $\mathbb{R} \times X$ i będzie spełniała warunek Lipschitza na całym tym zbiorze, to od razu uzyskamy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania *globalnego*, to znaczy określonego na całym $\mathbb{R}$.

1.1.2 Wybrane elementarne metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych

Rozdzielanie zmiennych W tej części $x(t)$ będzie oznaczało funkcje o wartościach liczbowych. Mamy równanie

$$\frac{dx}{dt} = f(x)g(t).$$

Dzielimy stronami przez $f(x)$[1] i całkujemy (pamiętając, że x jest funkcją t) po t:

$$\int \frac{1}{f(x)} \frac{dx}{dt}\, dt = \int g(t)\, dt.$$

Występującą po lewej stronie równania całkę obliczamy stosując podstawienie, skąd mamy

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)\, dt.$$

Równania jednorodne Chodzi tutaj o równania typu

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{x}{t}\right).$$

Wprowadzamy nową funkcje szukaną $y = \frac{x}{t}$. Mamy $x = ty$, skąd $x' = y + ty'$, a po podstawieniu do równania mamy $y + ty' = f(y)$, wobec czego $y' = \frac{f(y)-y}{t}$, a w tym równaniu można rozdzielić zmienne.

[1] Co zrobić z punktami, w których $f(x) = 0$? Nie wiadomo, każdemu takiemu przypadkowi trzeba się przyglądać osobno.

Obniżanie rzędu równania

a) Gdy mamy na przykład równanie drugiego rzędu typu $x'' = f(x', t)$, to wprowadzenie nowej funkcji szukanej $y = x'$ daje równanie pierwszego rzędu $y' = f(y, t)$.

b) Inny, w pewnym sensie ciekawszy przypadek to równanie typu $x'' = f(x', x)$ (prawa strona nie zależy od t). Stopień równania można obniżyć wprowadzając nową funkcję szukaną $x' = u(x)$. Wtedy $x'' = u'(x)x' = u'u$. Po podstawieniu do równania mamy $u'u = f(u, x)$, co jest równaniem pierwszego rzędu. Zwróćmy jednak uwagę na to, że po znalezieniu $u(x)$ trzeba jeszcze znaleźć $x(t)$, czyli rozwiązać równanie $x' = u(x)$. Jest to jednak równanie o zmiennych rozdzielonych.

1.2 Równania różniczkowe liniowe

Zajmujemy się tutaj równaniami, a właściwie układami równań różniczkowych następującego typu:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

gdzie $A(t) \in L(X)$, $b(t) \in X$. Widać, że jeśli $A(\cdot)$ i $b(\cdot)$ są funkcjami ciągłymi, to założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania są spełnione. We współrzędnych równanie to wygląda tak:

$$\begin{array}{ccccc} \dot{x}_1 & = & a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n & + & b_1(t) \\ \dots & & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & + & \dots \\ \dot{x}_n & = & a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n & + & b_n(t) \end{array}$$

Warunek początkowy: $x_1(t_0) = x_{01}, \dots, x_n(t_0) = x_{0n}$.

Przykład. Równanie tłumionego oscylatora harmonicznego z zewnętrzna siłą wymuszającą $\ddot{x} = -\omega^2 x - \gamma\dot{x} + F(t)$ po podstawieniu $v = \dot{x}$ przybiera postać układu równań:

$$\begin{array}{ccc} \dot{x} & = & v \\ \dot{v} & = & -\omega^2 x - \gamma v + F(t) \end{array}$$

1.2.1 Rozwiązanie układu równań liniowych; najpierw układy jednorodne

Do rozwiązania zagadnienia jednorodnego (bez $b(t)$ po prawej stronie równania) (2) użyjemy metody kolejnych przybliżeń tak, jak stosowaliśmy ją do dowodu twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania. Całkujemy (2) stronami od t_0 do t:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)\, ds$$

Jako zerowe przybliżenie bierzemy $x_0(t) \equiv x_0$. Podstawiając do prawej strony otrzymujemy pierwsze przybliżenie:

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t_1) x_0 \, dt_1 \ ,$$

i drugie:

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t_1) x_0 \, dt_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_2) \big(\int_{t_0}^{t_2} A(t_1) x_0 \, dt_1 \big) dt_2$$

po n krokach mamy

$$\begin{aligned} x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t_1) x_0 \, dt_1 + \int_{t_0}^{t} A(t_2) \big(\int_{t_0}^{t_2} A(t_1) x_0 \, dt_1 \big) dt_2 + \dots \\ + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_1} A(t_n) \dots A(t_1) x_0 \, dt_1 \dots dt_n \end{aligned}$$

Otrzymujemy sumy częściowe szeregu, który jest zbieżny ponieważ norma jego $n-$tego wyrazu daje się oszacować:

$$|| \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_n} \dots \int_{t_0}^{t_1} A(t_n) \dots A(t_1) x_0 \, dt_1 \dots dt_n || \le ||x_0|| \frac{t^n}{n!} C^n,$$

gdzie $C = \sup_{s \in [t_0, t]} ||A(s)||$, a prawa strona nierówności to wyrazy szeregu bezwzględnie zbieżnego.

Zauważmy, że iloczyn operatorów $A(t_n) \dots A(t_1)$ ze względu na kolejność całek i ich granice zawiera warunek $t_0 \le t_1 \le \dots \le t_n$. Jeśli operatory $A(s)$ są między sobą przemienne to znaczy $A(s)A(t) = A(t)A(s)$ dla dowolnych t, s, to można otrzymany wzór uprościć

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(t_1) x_0 \, dt_1 + \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} A(t_2) A(t_1) x_0 \, dt_1 dt_2 + \dots \\ + \frac{1}{n!} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{t} A(t_n) \dots A(t_1) x_0 \, dt_1 \dots dt_n + \dots \end{aligned}$$

Jeśli $A(\cdot)$ jest stałe, to wzór upraszcza się jeszcze bardziej, bo

$$\int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t} \dots \int_{t_0}^{t} A(t_n) \dots A(t_1) x_0 \, dt_1 \dots dt_n = A^n (t - t_0)^n x_0,$$

Czyli

$$x(t) = \left(I + A(t - t_0) + \dots + \frac{1}{n!} A^n (t - t_0)^n + \dots \right) x_0 \tag{3}$$

Sumę szeregu w nawiasie po prawej stronie oznaczamy przez $e^{A(t-t_0)}$. Aby efektywnie obliczyć tę sumę, zwrócimy uwagę na pewną własność funkcji wykładniczej operatora liniowego zdefiniowanej wzorem $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$. Mianowicie na ogól nie jest spełniona równość $e^{A+B} = e^A e^B$. Natomiast

Lemat 1 *Jeśli $AB = BA$, to $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Przechodzimy do obliczania sumy szeregu występującego po prawej stronie równania (3). Z algebry wiemy, że X jest sumą prostą podprzestrzeni pierwiastkowych operatora A. Dokładniej: $X = \oplus_i X_i$, gdzie $X_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i)^{n_i}$, a n_i jest krotnością wartości własnej λ_i. Zgodnie z tym rozkładem mamy $x_0 = \sum_i x_{0i}$, gdzie $x_{0i} \in X_i$.

$$e^{A(t-t_0)}x_0 = \sum_i e^{A(t-t_0)}x_{0i} = \sum_i \left(e^{(A-\lambda_i I)(t-t_0)+\lambda_i I(t-t_0)}\right) x_{0i} =$$
$$\sum_i \left(e^{\lambda_i(t-t_0)}\left[I + (t-t_0)(A-\lambda_i) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}(A-\lambda_i)^n + \dots\right]\right) x_{0i} \tag{4}$$

Suma szeregu w nawiasach kwadratowych równania (4) w działaniu na x_{0i} się urywa, ostatecznie mamy wzór:

$$x(t) = \sum_i \left(e^{\lambda_i(t-t_0)}\left[I + (t-t_0)(A-\lambda_i) + \dots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}(A-\lambda_i)^{n_i-1}\right]\right) x_{0i}.$$

Przykład. Rozwiążmy układ równań

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= -\omega^2 x \quad x(0) = x_0, \quad v(0) = v_0. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Równanie własne: $\lambda^2 + \omega^2 = 0$, skąd $\lambda = \pm i\omega$. Wartości własne są zespolone, co nie przeszkadza, bo twierdzenie algebraiczne dotyczy przestrzeni nad ciałem $\mathbb{C}$, a twierdzenie o istnieniu rozwiązania równania różniczkowego mówi o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania rzeczywistego. Jeśli nie pomylimy się w rachunkach, rozwiązanie musi ostatecznie okazać się rzeczywiste. Podprzestrzenie pierwiastkowe:

$$X_{i\omega} = a\begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix}, \quad X_{-i\omega} = b\begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega \end{bmatrix}.$$

Rozkładamy wektor opisujący warunek początkowy na składowe w podprzestrzeniach pierwiastkowych:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ i\omega \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ -i\omega \end{bmatrix},$$

Stąd $a = \frac{i\omega x_0 + v_0}{2i\omega}$, $b = \frac{i\omega x_0 - v_0}{2i\omega}$. Ponieważ krotności obydwu wartości własnych są równe 1, mamy $x(t) = e^{i\omega t}\frac{i\omega x_0 + v_0}{2i\omega} + e^{-\omega t}\frac{i\omega x_0 - v_0}{2i\omega} = x_0 \cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$.

1.2.2 Szczególny przypadek: jedno równanie liniowe wyższego rzędu o stałych współczynnikach

Jedno równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

Zamieniamy na układ n równań pierwszego rzędu stosując podstawienie

$$y_1 = y,\ y_2 = y',\ \ldots,\ y_n = y^{(n-1)}.$$

Otrzymujemy układ równań:

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{bmatrix}$$

Zajmujemy się na razie równaniem jednorodnym. Równanie charakterystyczne macierzy tego układu ma postać: $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$. Niech λ_i będą pierwiastkami tego równania o krotnościach odpowiednio n_i. Z ogólnej postaci rozwiązania układu równań liniowych jednorodnych wynika, że ogólnym rozwiązaniem tego równania jest

$$y(x) = \sum_i e^{\lambda_i x} P^i_{n_i-1}(x), \quad \text{gdzie } P^i_{n_i-1} \text{ to dowolne wielomiany stopnia } n_i - 1.$$

1.2.3 Równania liniowe niejednorodne. Metoda uzmienniania stałych

Zajmujemy się tutaj układem równań

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) \ \text{ z warunkiem początkowym } \ x(t_0) = x_0. \tag{5}$$

Rozwiązanie równania jednorodnego $\dot{x} = A(t)x$ zależy liniowo od warunku początkowego. Aby zaznaczyć ten rodzaj zależności wprowadzamy oznaczenie $x(t) = R(t,t_0)x_0$. Operator liniowy $R(t,t_0)$ nazywany rezolwentą ma następujące własności:

Lemat 2

1. *$R(t,s)R(s,p) = R(t,p)$,*
2. *$R(t,t) = I$,*
3. *$\frac{dR(t,s)}{dt} = A(t)R(t,s)$.*

Dowody poszczególnych punktów są bardzo proste, wystarczy zrozumieć, o co w tych punktach chodzi.

Przechodzimy teraz do rozwiązywania równania niejednorodnego. Rozwiązania będziemy poszukiwali w postaci $x(t) = R(t, t_0)z(t)$, gdzie $z(t)$ jest nieznane. Podstawiamy do równania (5):

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + b(t) = \frac{d}{dt}\big(R(t, t_0)z(t)\big) = \frac{dR(t, t_0)}{dt}z(t) + R(t, t_0)\frac{dz}{dt} = \\ = A(t)R(t, t_0)z(t) + R(t, t_0)z(t) = A(t)x(t) + R(t, t_0)\frac{dz}{dt} \end{aligned} \qquad (6)$$

Po skróceniu $A(t)x(t)$ z równania (6) pozostaje

$$R(t, t_0)\frac{dz}{dt} = b(t),$$

skąd

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\, ds.$$

Podstawiając do wzoru na $x(t)$ i uwzględniając fakt, że $z(t_0) = x_0$ mamy

$$\begin{aligned} x(t) = R(t, t_0)z(t) = R(t, t_0)x_0 + R(t, t_0)\int_{t_0}^{t} R(t_0, s)b(s)\, ds = \\ = R(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, s)b(s)\, ds. \end{aligned}$$

1.2.4 Równania liniowe niejednorodne c.d. Wrońskian. Twierdzenie Liouville'a

Niech $R(t, t_0)$ będzie rezolwentą układu równań liniowych jednorodnych $\dot{x} = A(t)x$. Wrońskianem tego układu nazywamy[2]

$$W(t, t_0) := \det R(t, t_0).$$

Twierdzenie 2 (Liouville'a)

$$\frac{dW(t, t_0)}{dt} = \mathrm{Tr} A(t)\, W(t, t_0).$$

[2] Wrońskianem układu funkcji $f_1, \ldots, f_n$ nazywa się czasem wyznacznik macierzy, której kolejne wiersze są równe $f_i, f_i', \ldots, f_i^{(n-1)}$. Takie coś jest wrońskianem związanym z jednym równaniem rzędu n, co łatwo zauważyć sprowadzając takie równanie do układu równań pierwszego rzędu.

Dowód. Oznaczmy kolumny macierzy $R(t, t_0)$ przez $c_1, \ldots, c_n$. Mamy

$$\begin{aligned}\frac{dW(t,t_0)}{dt} &= \frac{d}{dt}\det(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(c_1, \ldots, \frac{dc_i}{dt}, \ldots, c_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \det(c_1, \ldots, R(t,t_0)c_i, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} \det(c_1, \sum_{k=1}^{n} c_{ki}c_k, \ldots, c_n) = \\ &\qquad\qquad = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} \det(c_1, \ldots, c_n) = \mathrm{Tr}A(t)\, W(t, t_0).\end{aligned}$$

Przykład zastosowania. Jeśli $A(t)$ jest funkcją stałą to mamy $\frac{d}{dt}W(t,0) = \mathrm{Tr}AW(t,0)$, skąd po uwzględnieniu warunku $W(0,0) = 1$ mamy $W(t,0) = e^{\mathrm{Tr}At}$. Z drugiej strony $W(t,0) = \det e^{At}$. Biorąc $t = 1$ mamy $\boxed{\det e^{A} = e^{\mathrm{Tr}A}}$.