Zadania z algebry

Zadanie 1. Oprócz poniższych zadań, polecam zadania 185, 188 ze zbioru zadań "'*Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami.*" pod redakcją J. Jezierskiego.

Zadanie 2. Bazą standardową w $\mathbb{R}^n[\cdot]$ nazywamy bazę jednowianów $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n\}$. Bazą standardową w przestrzeni macierzy $M(\mathbb{R})_{n\times m}$ nazywamy bazą złożoną z macierzy

$$\{e_{1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{1,m}, \dots, e_{n,m-1, e_{n,m}}\}$$

gdzie e_{kl} gdzie jest macierzą w której w k-tym wierszu i l-tej kolumnie stoi 1 a w pozostałych miejscach stoją zera. Utożsamiając $M(\mathbb{R})_{n\times 1}$ z $\mathbb{R}^n$ dostajemy bazę standardową w $\mathbb{R}^n$. Znaleźć, macierze operatorów z zadania 295 (a)-(e) (ze zbioru zadań "'*Od liczb zespolonych do kwadryk. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami.*") w odpowiednich bazach standardowych.

Zadanie 3. Rozważmy operator liniowy $D : \mathbb{R}_2[\cdot] \to \mathbb{R}^3$ dany wzorem

$$Dw = \begin{bmatrix} w'(0) \\ w'(1) \\ w'(-1) \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} w'(-1) \\ w'(0) \\ w'(1) \end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz operatora D w bazach: $(t^2, t, 1)$ przestrzeni $\mathbb{R}_3[\cdot]$ oraz bazie standardowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Podać opis $\ker D$ i $RanD$ wskazując jakieś bazy tych przestrzeni.

Zadanie 4. Rozważmy operator liniowy $T : \mathbb{C}_3[\cdot] \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dany wzorem

$$T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$$

gdzie $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : \quad X = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$.

- Znaleźć macierz operatora $[T]_e^f$ gdzie $e = (1, t, t^2, t^3)$ oraz
$$f = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$
- Znajdując odpowiednie macierze przejścia między bazami znaleźć macierz $[T]_{e'}^{\sigma}$ gdzie $e' = (1, 1+t, 1+t+t^2/2, 1+t+t^2/2+t^3/6)$ oraz σ jest bazą macierzy Pauliego: $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Zadanie 5. Operator $F \in \mathrm{Lin}(\mathbb{R}_2[\cdot], \mathbb{R}_1[\cdot])$ odwzorowuje wielomiany $1+t, (1+t)^2, (1-t)^2$ odpowiednio na wielomiany $t, 1+t, 1-t$. Znaleźć macierz $[F]_{1,t,t^2}^{t-1,t+1}$.

Zadanie 6. Niech $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) : a + d = 0 \right\}$. Sprawdzić że dla każdego $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ oraz $A \in V$ mamy $XA - AX \in V$. Rozważmy odwozorowanie liniowe $F : V \to V$: $FA = XA - AX$ gdzie $X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć $[F]_e^f$ gdzie $e = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (σ_i są odpowiednimi macierzami Pauliego) oraz $f = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.