(1) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$(\mathcal{F}f)(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} f(x)\,dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-ipx}\,dx$$

<u>$p \neq 0$</u>

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-ipx}\,dx = \frac{1}{2} \frac{1}{-ip} e^{-ipx} \Big|_{x=-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{-ip} \left(e^{-ip} - e^{ip} \right) = \frac{1}{p} \frac{e^{ip} - e^{-ip}}{2i} = \frac{\sin p}{p}$$

<u>$p = 0$</u>

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} e^{-i \cdot 0 \cdot x}\,dx = 1$$

<u>ODP.</u>

$$(\mathcal{F}f)(p) = \begin{cases} \frac{\sin p}{p} & p \neq 0 \\ 1 & p = 0 \end{cases}$$

(2)

MACIERZ PRZEJŚCIA:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

MAMY $P^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $P^3 = P$

STĄD $P^{2k} = P^2 \quad k \in \mathbb{N}$

$P^{2k+1} = P \quad k \in \mathbb{Z}_+$

W SZCZEGÓLNOŚCI DLA $i \in \{1, \ldots, 4\}$ P-STWO PRZEJŚCIA ZE STANU i DO i W n KROKACH JEST RÓWNE

$$p_{ii}(n) = \begin{cases} 0 & n\text{-NIEPARZYSTE} \\ \frac{1}{2} & n\text{-PARZYSTE} \end{cases}$$

DLATEGO $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$ (SUMA ∞-WIELU $\frac{1}{2}$)

i WSZYSTKIE STANY SĄ POWRACAJĄCE.

③

SZUKAM WARTOŚCI WŁASNYCH

$$\det(A-\lambda\mathbb{1}) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & -4 & 1 \\ -4 & -\lambda & -4 \\ 1 & -4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2 + 16 + 16 + \lambda - 16\cdot(3-\lambda) - 16(3-\lambda)$$

$$= -\lambda(9-6\lambda+\lambda^2) - 4\cdot 16 + 33\lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 24\lambda - 64 = -(\lambda-2)(\lambda^2-4\lambda-32)$$

$$= -(\lambda-2)(\lambda-8)(\lambda+4)$$

SĄ 3 WART. WŁ., WIĘC PODP-NIE WŁASNE BĘDĄ 1-WYMIAROWE

PODPRZESTRZENIE WŁASNE

$\lambda = 2$

$$\ker(A-2\mathbb{1}) = \ker\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -4 & -2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{cases} a+c = 4b \\ 2(a+c)+b = 0 \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{cases} a+c = 4b \\ a+c = -\frac{1}{2}b \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\lambda = 8$

$$\ker(A-8\mathbb{1}) = \ker\begin{bmatrix} -5 & -4 & 1 \\ -4 & -8 & -4 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{cases} c = 5a+4b \\ a+2b+c = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{matrix} a = -b \\ c = a \end{matrix} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\lambda = -4$

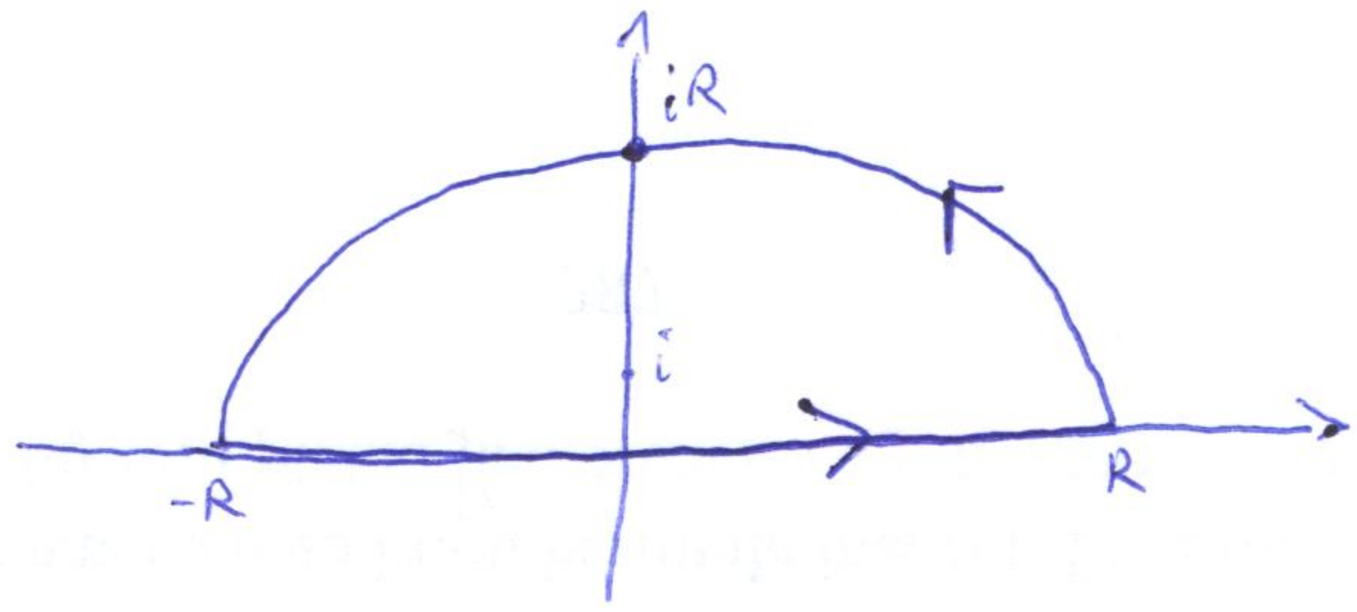
$$\ker(A+4\mathbb{1}) = \ker\begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 4 & -4 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{cases} 7a+c = 4b \\ a+c = b \end{cases} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \middle| \begin{cases} 2a = b \\ c = b-a \end{cases} \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

NIECH $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. UKŁAD $\{v_1, v_2, v_3\}$ JEST ORTOGONALNY, BO $A = A^*$. NIECH $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

UKŁAD $\{e_1, e_2, e_3\}$ JEST ORTONORMALNĄ BAZĄ WŁASNĄ DLA A.

④ NIECH Γ_R BĘDZIE TAKIM KONTUREM:



MAMY DLA $f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)^2}$

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f = \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \underbrace{\int_{-R}^{R} f(x)dx}_{\xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}dx} + \int_{\frown} f(z)\,dz$$

JEDYNY PUNKT OSOBLIWY f WEWNĄTRZ Γ_R, BO

$$f(z)=\frac{ze^{iz}}{(z-i)^2(z+i)^2}.$$

$$\left|\int_{\frown} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} f(Re^{i\varphi})\, iRe^{i\varphi}d\varphi\right| \le R\int_0^{\pi} |f(Re^{i\varphi})|\,d\varphi$$

$$|f(Re^{i\varphi})| = \left|\frac{Re^{i\varphi}\, e^{iR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}}{(R^2e^{2i\varphi}+1)^2}\right| \le \frac{R\,e^{-R\sin\varphi}}{(R^2-1)^2} \le \frac{R}{(R^2-1)^2}$$

$\sin\varphi \ge 0$ DLA $\varphi\in[0,\pi]$

ZATEM $$\left|\int_{\frown} f(z)\,dz\right| \le R\cdot\pi\,\frac{R}{(R^2-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

STĄD $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{(x^2+1)^2}dx = \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f = 2\pi i \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right) =$$

i - BIEGUN DRUGIEGO RZĘDU

$$= 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{(e^{iz}+ize^{iz})(z+i)^2 - 2ze^{iz}(z+i)}{(z+i)^4} = 2\pi i\,\frac{(e^{-1}-e^{-1})(2i)^2 - 2ie^{-1}(2i)}{(2i)^4} =$$

$$= 2\pi i\,\frac{4e^{-1}}{16} = \frac{\pi i}{2e}.$$