Analiza II seria 2

Zadanie 1. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem:

a) $f(x, y) = \sin(x + y) + 6\sin(x) + \sin(y)$

b) $f(x, y) = 17\sin(x + y) + 10\sin(x) + 17\sin(y)$

Zadanie 2. Wyznaczyć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbb{R}$:

a) $X = \mathbb{R}^n_+,\ f(x) = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n + \frac{1}{x_1} + \frac{2}{x_2} + \ldots \frac{n}{x_n}$

b) $X = \mathbb{R}^n,\ (a_1, a_2, \ldots, a_n)$-dany, $f(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}$

Zadanie 3. Znaleźć odległość punktu $(0, 0, 0)$ od powierzchni określonej równaniem $z = \dfrac{1}{xy}$.

Zadanie 4. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : X \to \mathbb{R}$:

a) $X = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$

b) $X = \mathbb{R}^3_+$, $f(x, y, z) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)\left(1 + \dfrac{y}{z}\right)(1 + z)$

Zadanie 5. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto z(x, y)$, zdefiniowanej niejawnie równaniem

a) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + z - 2 = 0$

b) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)z^3 + xyz^2 + 1 = 0$

c) $3z^3 - 7\cos(x + y) + \dfrac{20x}{x^2 + 1} = 0$

Zadanie 6. Znaleźć pochodną odwzorowania $(u(x, y), v(x, y))$ w punkcie $(x, y, u, v) = (1, 2, 3, 4)$ niejawnie danego równaniami $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, u, v) = 0$ gdzie

$$F(x, y, u, v) = (x + y + u + v - 10, x^2 + y^2 + u^2 + v^2 - 30).$$

Zadanie 7. Jaką powierzchnię w $\mathbb{R}^3$ opisuje parametryzacja:
$x = \dfrac{u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2},\ y = \dfrac{2uv}{1 + u^2 + v^2},\ z = \dfrac{1}{1 + u^2 + v^2}$.

Zadanie 8. Niech $H = \{(x, y, z) : x\sin(z) - y\cos(z) = 0\}$. Udowodnić, że odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u\cos(v), u\sin(v), v) \in \mathbb{R}^3$ jest parametryzacją H. Znaleźć płaszczyznę styczną do H przechodzącą przez punkt $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$ oraz jej przecięcie z H.

Zadanie 9. Niech $\mathbb{H}^n$ będzie hiperboloidą wymiaru n:

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1}^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 = 1,\ x_{n+1} > 0\}.$$

Udowodnić, że odwzorowanie $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-\sum_{i=1}^n t_i^2}}(t_1, t_2, \ldots, t_n, 1)$, gdzie $\sum_{i=1}^n t_i^2 < 1$, jest parametryzacją $\mathbb{H}^n$. Znaleźć płaszczyznę styczną do $\mathbb{H}^n$ w punkcie $(0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{H}^n$.

Zadanie 10. Znaleźć przekrój torusa $S = \{(x, y, z) :\ (\rho - b)^2 + z^2 = a^2\}$, $0 < a < b$ z płaszczyzną styczną przechodzącą przez punkt $(x_0, y_0, 0)$ gdzie $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = b - a$. Wskazówka: skorzystać z symetrii osiowej i rozwiązania zadania z ćwiczeń dla punktu $(b - a, 0, 0)$.

Zadanie 11. Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f : S \to \mathbb{R}$ jeśli $f(x, y, z) = (x - 3y)z$, $S = \{(x, y, z) :\ 3x^2 + 5y^2 + 30z^2 = 32\}$. Zbadać jeden z punktów krytycznych.

Zadanie 12. Stosując metodę mnożników Lagrange'a znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na zbiorze $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$. Zbadać typ jednego ze znalezionych punktów krytycznych, badając pochodne rzędu 2.