ANALIZA I
3 grudnia 2015
Semestr zimowy
Praca domowa (©Javier)

Różniczkowalność funkcji

Zadanie 1. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ funkcja

$$f(x) := \begin{cases} ax + b, & \text{gdy } a \leq 0, \\ \left(\frac{1}{x}\arcsin x\right)^{1/x^2}, & \text{gdy } 0 < x < 1 \end{cases}$$

jest różniczkowalna.

Zadanie 2. Zbadać różniczkowalność funkcji w $\mathbb{R}$ danych wzorem

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases}$$

Zadanie 3. Sprawdzić różniczkowalność funkcji w podanych punktach:

$$f_1(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \qquad f_2(x) := \begin{cases} 2^x + 3x^2, & \text{gdy } x < 2, \\ \log_{\sqrt{2}} x + 7x, & \text{gdy } x \geq 2, \end{cases}$$

$$f_3(x) := \begin{cases} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x}, & \text{gdy } x \neq 0, \\ 0, & \text{gdy } x = 0, \end{cases} \qquad f_4(x) := \begin{cases} x^3 + x^2 - \frac{1}{\pi} \sin \pi x, & \text{gdy } x \leq 1, \\ x^5 + x, & \text{gdy } x > 1, \end{cases}.$$

Obliczenie pochodnych

Zadanie 4. Obliczyć pochodne

$$y = \ln \ln \operatorname{tg} x, \qquad y = 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)}, \qquad y = \arccos \sqrt{1 - 2^x}, \qquad y = \frac{x^3(x^2+1)^4}{\sqrt{x(x-1)}}.$$

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \sqrt{\operatorname{tg} x}\right), \qquad y = \operatorname{arc\,ctg}^3\left(\frac{3\ln x + 2}{4x + 1}\right), \qquad y = \frac{\sqrt{x^2+1}\cos(2x+1)}{3^{x+1}},$$

$$y = \frac{\sqrt{x}\operatorname{arc\,tan}(2x-1)}{\ln x}, \qquad y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \qquad y = \cos^2\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right).$$

$$y = \arccos \sqrt{1 - x^2}, \qquad y = \ln \frac{2x + \sqrt{x}}{1 - x^2}.$$

Zadanie 5. Obliczyć pochodne

$$y = (\operatorname{ctg}(x))^{x^3}, \qquad y = x^{\arcsin x}, \qquad y = x^{\ln x}, \qquad y = (\cos x)^{\operatorname{arc\,tg} x}, \qquad y = (\sin 2x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Zadanie 6. Obliczyć dziesiąta pochodną funkcji

$$a)\ f(x) = xe^{2x}, \qquad b)\ f(x) = x^2\sqrt[3]{1-x}, \qquad c)\ x^3\log(5+2x).$$

Zadanie 7. Udowodnić metodą indukcji, że

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Zadanie 8. Znajdź n-tą pochodną funkcji:

$$f(x) = (3x^2+3x+1)\ln(x+1), \qquad f(x) = \ln\frac{x^2-1}{x^2-4x+4}.$$

Granice funkcji i L'Hôpital

Zadanie 9. Obliczyć lewostronną i prawostronną granicę funkcji w podanych punktach

$$a)\ f(x) = xe^{1/x}, \quad x=0, \quad b)\ f(x) = \frac{x}{2x+e^{\frac{1}{x-1}}}, \quad x=1, \quad c)\ f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \quad x=0.$$

Zadanie 10. Wyznaczyć granice:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^3+5x^2-6x-16} \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}-1}{\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{kx}}{x^n} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$$

Zadanie 11. Wyznaczyć granice:

$$\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}2x \qquad \lim_{x\to+0}\sqrt[3]{x}\log x$$
$$\lim_{x\to\pi/2}(\mathrm{tan}x-\mathrm{sec}x) \qquad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log n}-\frac{x}{x-1}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$$

Zadanie 12. Wyznaczyć granice:

$$\lim_{x\to 0}\cos 3x\mathrm{tg}5x \qquad \lim_{x\to+0}x^2e^{\sqrt{x}}$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{5}{x^2-1}-\frac{7}{x^7-1}\right) \qquad \lim_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\frac{1}{x}\right)$$

Zadanie 13. Wyznaczyć granice:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}(x))^{\mathrm{tg}2x} \qquad \lim_{x\to+\infty}(\log x)^{\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\frac{a}{\log 2(x-1)}}$$

Zadanie 14. Obliczyć granice przy $x \to 0$ następujących funkcji:

$$a)\ f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad b)\ f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}, \qquad c)\ f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\tanh^2 \mathrm{x}}.$$

Przebieg funkcji

Zadanie 15. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+1} - \operatorname{arc\,tg} x.$$

Zadanie 16. Zbadać przebieg funkcji $f : \mathbb{R}\backslash]0,1] \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}.$$

Zadanie 17. Dowieść, że $(1+x)^p \geq 1 + px$ dla $x \in]1, +\infty[$ oraz $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$.

Zadanie 18. Wyznaczyć przedziały monotoniczności następujących funkcji

$$(a)\ f(x) = (1-x^2), \qquad (2)\ f(x) = 1 - 24x + 5x^2 - 2x^3, \qquad (3)\ f(x) = \log|x|.$$

Zadanie 19. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 8x}{x^2 - 9}, \qquad f(x) = \ln(\sin x), \qquad f(x) = x\frac{x^2+4}{x^2-25}.$$

Zadanie 20. Znaleźć ekstrema następujących funkcji

$$(a)\ f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}, \qquad \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}, \qquad f(x) = \ln|x|.$$

Szeregi Taylora

Zadanie 21. Rozwinąć w szereg Taylora wokół podanego punktu następujące funkcje:

$a)\ f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}, \quad x = 0 \qquad b)\ f(x) = \sin x - x\cos x, \quad x = 0,$
$c)\ f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = 3 \qquad d)\ f(x) = x\sqrt{x}, \quad x = 1,$
$e)\ f(x) = \sin\frac{\pi x}{4}, \quad x = 2, \qquad f)\ f(x) = \cos\frac{1}{2}x, \quad x = \frac{1}{2}\pi,$

Zadanie 22. Napisać wzór Taylora w $x_0 = 0$ dla $f(x) = \log(1+x)$.

ANALIZA I
3 grudnia 2015
Semestr zimowy
Praca domowa (©Javier)

Zastosowania pochodnych

Zadanie 23. Jak z trzech jednakowych desek zrobić rynnę o największym przekroju poprzecznym?

Zadanie 24. Wybrać takie miejsce na budowę mostu przez rzekę, aby długość drogi łączącej dwa obiekty leżące po różnych stronach rzeki była jak najmiejsza.

Zadanie 25. Jaki prostokąt utworzony z kawałka drutu o długości l ma największe pole?

Zadanie 26. Od kanału o szerokości a odchodzi pod kątem prostym kanał o szerokości b. Jaką najdłuż szą drewnianą belką można spławić z jednego kanału do drugiego.

Zadanie 27. Korzystając z rozwinięć odpowiednich funkcji oblicz $\sqrt{e}$ z dokładnością do 0.001 posługując się rozwinięciem e^x.