Zadania domowe z Analizy II. Seria 3. 29.04.2016

1. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania:
(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{x}$, (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x-5}{y-2x-4}$, (c) $6xy^5 \frac{dy}{dx} = x^3 + 4y^6$,
(d) $\frac{dy}{dx} = y + \frac{e^x}{x}$, (e) $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 = y^2 \frac{dy}{dx}$, (f) $x^2(\log x - 1)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ wsk. Znaleźć najpierw rozwiązanie w postaci wielomianu. (h) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos x$, (j) $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 0$ wsk. jednym z rozwiązań jest e^{x^2} (k) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ wsk. jednym z rozwiązań jest x (l) $(t+1+e^t)x'' + tx' - x = 0$ wsk. jednym z rozw. jest t (m) $y'' - (y')^2 = y^2y'$ (n) $(x^2 - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$ (o) $\frac{dy}{dx}(x+y)^2 = a^2$ (p) $(x^3 + y)dx - xdy = 0$ (q) $(y^2 + 3x)dy - ydx = 0$ (r) $\frac{d^2y}{dx^2} - (\frac{dy}{dx})^2 = y^2\frac{dy}{dx}$; (s) $\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{2x+y^2}$; (t) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 2\tan x$; (u) $\frac{dy}{dx} + y^2 - 2y\sin x + \sin^2 x - \cos x = 0$, wsk. jednym z rozwiązań jest $\sin x$ (w) $x^2\frac{dy}{dx} = x^2y^2 + xy + 1$ wsk. jednym z rozwiązań jest $-\frac{1}{x}$

2. Rozwiązać zagadnienie początkowe:
(a) $(x+2)^5\frac{d^2y}{dx^2} = 1$, $y(-1) = \frac{1}{12}$, $\frac{dy}{dx}(-1) = -\frac{1}{4}$,
(b) $2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + x^2\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, $y(1) = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\frac{dy}{dx}(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (c) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2y}$, $y(0) = 0$, $\frac{dy}{dx}(0) = 1$,
(d) $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = x$, $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$ (e) $\frac{dy}{dx} = (x+y)^2 - 2$, $y(1) = -1$, $y(0) = 0$ (f) $\frac{dy}{dx}x + y = xy^2$, $y(0) = 1$ (g) $\frac{dy}{dx} - y = xy^2$, $y(0) = 0$ (h) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + y + 2z & x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = -3x + 3z & y(0) = 0 \\ \frac{dz}{dt} = -2x + y + 2z & z(0) = 2 \end{cases}$

3. Rozwiązać układy równań:
(a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + t^2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z & x(0) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = x + z & y(0) = 1 \\ \frac{dz}{dt} = x + y & z(0) = 0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2y + 1 - t \\ \frac{dy}{dt} = -2x - 2y + 1 + t \end{cases}$
(d) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y - 2z & x(0) = 1 \\ \frac{dy}{dt} = 4x + y & y(0) = -1 \\ \frac{dz}{dt} = 2x + y - z & z(0) = -1 \end{cases}$ (e) $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + 3 = 3x + 4y \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -x - y + 5 \end{cases}$ (f) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2z & x(0) = 2 \\ \frac{dy}{dt} = x - 5z & y(0) = -1 \\ \frac{dz}{dt} = y + 4z & z(0) = 0 \end{cases}$

4. Znaleźć rozwiązania ogólne równania:
(a) $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x$; (b) $y'' - 3y' + 2y = 2e^x\cos\frac{x}{2}$; (c) $y'' - 4y' + 4y = 2(x + \sin 2x)$; (d) $y'' + y = \sin x - 2e^{-x}$. (e) $y'' - 6y' + 9y = 25e^x\sin x$; (f) $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$. (g) $y''' + y'' - y' - y = t^2 - 1 + te^{2t} + te^{-t} + 4\sin t$ (h) $y'' - 2y' + y = xe^x$.

5. Rozwiązać zagadnienie początkowe: $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} = x$, $y(0) = \frac{dy}{dx}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$

6. Wyznaczyć rozwiązanie ogólne równania:
(a) $x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 4x^3y = 0$ wsk. jednym z rozwiązań jest e^{x^2}; (b) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$ wsk. jednym z rozwiązań jest x

7. Ułożyć równanie, którego bazą rozwiązań jest:
(a) $\sin x$, e^x ; (b) $\sin x$, $\sin(2x)$; (c) x , x^2 , x^3 ;