IV seria (świąteczna) zadań domowych z Analizy I

Zad. 1
Korzystając z rozwinięcia w szereg Taylora znaleźć granice

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{e^x-1-x-x^2/2-x^3/6-x^4/24},\ \lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x^2)-x^2}{\cos x-1+x^2/2},\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,tg} x-x+x^3/3}{\ln(1-x)+x+x^2/2+x^3/3+x^4/4}$$

Zad. 2
Znaleźć promień zbieżności szeregu wokół $x=0$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{n!}x^{5n},\ \sum_{n\geq 1}\frac{(2x)^n}{n^{2015}},\ \sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(2n-1)!!}x^{2n},\ \sum_{n\geq 1}\sqrt{10!}x^{2n}/10^n$$

Zad. 3
Który szereg jest zbieżny, który bezwzględnie?

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n(2015n)^n/n!,\sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{n^2+2015n}{n^3+n^2+n+1},\sum_{n\geq 1}(\operatorname{arc\,tg}(1/n)-1/n),\sum_{n\geq 1}n\ln(1-1/n^2),\sum_{n\geq 1}(n!)^2/(2n)!,\sum_{n\geq 1}\frac{n!n^{n/2}}{(2n)!},$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{1+n^2}-n}{\sqrt[3]{n}},\sum_{n\geq 1}\sin(\sqrt{2}n)/n,\sum_{n\geq 1}\sqrt{\ln(1+n^{-2}}\sum_{n\geq 1}(1-\cos(n^{-1/2})n^{-1/2}\sum_{n\geq 0}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1})\sum_{n\geq 1}(\sqrt[n]{n}-1)^n$$

Zad. 4
Obliczyć całki nieoznaczone (funkcje pierwotne) z funkcji

$$x^{2015}-10x^{2016}+2014/x, x/\sqrt{1+x^2}, 1/(1+x^2)^{3/2}, (1+x^2)^{-2}, (1-x^4)^{-1}, x\ln x, x\operatorname{arc\,tg} x, \frac{\ln x}{x}, (x^2+2x-4)e^x, \frac{x}{\cos^2 x},$$

$$(\ln x)^2\sqrt{x}, \frac{x^2+1}{x^4+1}, \frac{x+1}{(x^2+x+3)(x^2+4x+5)}, \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}, (x\sqrt{1+x^{2015}})^{-1}, \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}, \operatorname{tg}^2 x, x^{-2}\arcsin x,$$

$$\arcsin\sqrt{x/(1+x)}, \sin(\ln x), \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}, \frac{\sin x\cos^3 x}{2+\sin^2 x}, \sqrt{e^{2x}+2e^x+4}, (x^3\sqrt{x+x^2})^{-1}, (x+\sqrt{x-x^2})^{-1},$$

$$(8+6x-9x^2)^{-1/2},\ \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}},\ \cos^{-4} x$$

Zad. 5
Znaleźć związki rekurencyjne (tj. $n\to n+1$ lub $n+2$) pomiędzy całkami

$$I_n=\int x^n e^x dx,\ J_n=\int x^n\sin x dx,\ K_n=\int x^n\cos x dx,\ L_n=\int \sin^n x dx,\ M_n=\int x^n dx/(1+x^2)$$

Zad. 6
Obliczyć całki oznaczone

$$\int_a^b (x-a)^n(b-x)^m dx,\ \int_0^\pi x^{2015}\sin x dx,\ \int_0^1 \ln^3 x dx,\ \int_0^\pi \cos^n x\cos nx dx,\ \int_0^{2\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$$

Zadanie świąteczne
Pokaż (metodą Bourbaki) że π jest niewymierne. Przypuśćmy że $\pi=a/b$, ułamek nieskracalny (a,b naturalne). Weźmy całkę

$$I=\int_0^\pi x^n(a-xb)^n\sin x dx.$$

Znaleźć maximum M funkcji $x(a-bx)$ i wywnioskować że $I\leq \pi M^n$. Następnie liczyć I całkując iteracyjnie przez części. Zauważyć, że (1) początkowe całki zerują się na brzegach (0, π), (2) od n-tej (do $2n$) muszą być liczbami podzielnymi przez $n!$. Zatem $I\geq n!$ (bo jest całką z funkcji dodatniej) czyli $\pi M^n\geq n!$ co od jakiegoś n jest niemożliwe.