Matematyka III, 2021-22
Tydzień 3
(robimy zadania z •)

0.1 Całki krzywoliniowe nieskierowane

1. • Obliczyć długość jednego łuku cykloidy (tzn. krzywej danej parametrycznie przez: $x = R(t - \sin t)$, $y = R(1 - \cos t)$). **Odp.** $8R$.

2. Obliczyć długość elipsy o półosiach a i b. **Odp.** wyraża się przez całkę eliptyczną.

3. Obliczyć długość łuku paraboli $y = ax^2$ pomiędzy punktami x_1 i x_2.

4. Obliczyć długość *krzywej łańcuchowej*, tzn. odcinka linii $y = \cosh x$ pomiędzy $x = 0$ a $x = x^*$.

5. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{x-y}$, gdzie γ jest odcinkiem łączącym punkty $A = (0, -2)$ i $B = (4, 0)$.

6. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma xy\mathrm{d}s$, gdzie γ jest prostokątem o wierzchołkach $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$, $C = (6, 3)$ i $D = (0, 3)$.

7. • Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma xy\mathrm{d}s$, gdzie γ jest ćwiartką elipsy o półosiach a i b, leżącą w pierwszej ćwiartce. **Odp.** $\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$.

8. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \sqrt{2y}\mathrm{d}s$, gdzie γ jest łukiem cykloidy (jeśli ktoś nie wie co to jest to p. zad. 1) dla $t \in [0, 2\pi]$. **Odp.** $4\pi\sqrt{R^3}$.

9. Niech krzywa γ będzie opisana parametrycznie we współrzędnych *biegunowych*: $r = r(t)$, $\phi = \phi(t)$ dla $t \in [a, b]$. Pokazać, że całka krzywoliniowa nieskierowana $I = \int_\gamma f(x, y)\mathrm{d}s$ wyraża się wzorem:

$$I = \int_a^b f(r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t))\sqrt{r(t)^2\phi'(t)^2 + r'(t)^2}\mathrm{d}t$$

gdzie primy oznaczają pochodne po t.

10. • Pokazać, że w przypadku, gdy opis krzywej jako: $r = r(\phi)$, to całka krzywoliniowa nieskierowana $I = \int_\gamma f(x, y)\mathrm{d}s$ wyraża się wzorem:

$$I = \int_a^b f(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi)\sqrt{r(\phi)^2 + r'(\phi)^2}\mathrm{d}\phi$$

gdzie prim oznaczają pochodną po ϕ: $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi}$.

11. • Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma x\sqrt{x^2 - y^2}\mathrm{d}s$, gdzie γ jest połówką lemniskaty Bernoulliego: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ dla $x \geqslant 0$.

12. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\mathrm{d}s$, gdzie γ jest kawałkiem spirali Archimedesa $r = 2\phi$, położonym wewnątrz okręgu o promieniu R i środku w punkcie $(0, 0)$. **Odp.** $\frac{2}{3}[(1 + \frac{R^2}{4})^{3/2} - 1]$.

13. Obliczyć długość łuku spirali Archimedesa w sytuacji z poprzedniego zadania.

14. Obliczyć współrzędne środka ciężkości połówki okręgu o stałej liniowej gęstości masy i promieniu R, znajdującego się w górnej półpłaszczyźnie.

15. Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma \frac{z^2 \mathsf{d}s}{x^2+y^2}$, gdzie γ jest fragmentem linii śrubowej: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = Rt$ dla $t \in [0, \pi]$. **Odp.** $\frac{1}{3}a\sqrt{2}(2\pi)^3$.

16. • Obliczyć całkę krzywoliniową $\int_\gamma xyz\mathsf{d}s$, gdzie γ jest ćwiartką okręgu danego równaniami: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ dla $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

0.2 Całki krzywoliniowe skierowane (tzn. z 1−form) & tw. Greena

17. • Obliczyć całkę: $\int_\gamma (x^2 - y^2)\mathsf{d}y$, gdzie γ jest fragmentem paraboli $y = x^2$ pomiędzy punktami $(0, 0)$ a $(3, 9)$.

18. Obliczyć całkę: $\int_\gamma -x\cos y\mathsf{d}x + y\sin x\mathsf{d}y$, gdzie γ jest odcinkiem łączącym punkty $(0, 0)$ oraz $\pi, 2\pi$.

19. Obliczyć całki krzywoliniowe: $I_1 = \int_\gamma x\mathsf{d}y$, $I_2 = -\int_\gamma y\mathsf{d}x$ po elipsie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, skierowanej dodatnio względem jej obszaru wewnętrznego. Wynik zinterpretować z użyciem tw. Greena.

20. • Obliczyć całkę: $\int_\gamma yz\mathsf{d}x + zx\mathsf{d}y + xy\mathsf{d}z$, gdzie γ jest jednym zwitkiem linii śrubowej $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ (tzn. t się zmienia od 0 do 2π).

21. Obliczyć całkę: $\int_\gamma y^2\mathsf{d}x + z^2\mathsf{d}y + x^2\mathsf{d}z$, gdzie γ jest krzywą, będącą przecięciem sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ z cylindrem $x^2 + y^2 = Rx$ (tu $R > 0$, $z \geqslant 0$). (Jest to tzw. *krzywa Vivianiego*). Kierunek obiegu γ jest taki, że startując z punktu $(R, 0, 0)$ idzie się najsampierw przez punkty o wszystkich współrzędnych dodatnich.

22. • Obliczyć całkę: $\int_\gamma \frac{y^2\mathsf{d}x - x^2\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$, gdzie γ jest półokręgiem $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, przebieganym od $t = 0$ do $t = \pi$.

23. • Obliczyć całkę: $\int_\gamma \frac{y^2\mathsf{d}x - x^2\mathsf{d}y}{x^2+y^2}$, gdzie γ jest połówką elipsy: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, przebieganą od $t = 0$ do $t = \pi$.

24. • Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}y$, gdzie γ jest brzegiem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych oraz prostą: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. Krzywa γ jest obiegana w dodatnim (tzn. antyzegarowym) kierunku.

25. To samo ogólniej: Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}y$, gdzie γ jest brzegiem trójkąta utworzonego przez osie współrzędnych oraz prostą: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $a, b > 0$. Krzywa γ jest obiegana w dodatnim (tzn. antyzegarowym) kierunku. Całkę tę niezależnie obliczyć z tw. Greena; zinterpretować wynik.

26. **a)** Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y$, gdzie γ jest fragmentem wykresu funkcji $y = e^x$, łączącym punkty $A = (0, 1)$ i $B = (2, e^2)$. **b)** Obliczyć to samo wzdłuż odcinka łączącego A i B. Zinterpretować wynik wykorzystując tw. Greena.

27. **a)** Obliczyć całkę: $\int_\gamma x\mathsf{d}x + y\mathsf{d}y$, gdzie γ jest ćwiartką okręgu $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, przebieganą od $t = 0$ do $t = \frac{\pi}{2}$. **b)** Obliczyć to samo wzdłuż odcinka łączącego $(0, R)$ i $(R, 0)$. Zinterpretować wynik wykorzystując tw. Greena.

28. Obliczyć pole powierzchni figury ograniczonej osią $y = 0$ oraz jednym łukiem cykloidy. Wsk. Użyć tw. Greena.