

## Pytania na egzamin ustny, Analiza I 2015/2016

- (1) Zdefiniować relację porządku, ograniczenie górne, kres górny oraz własność posiadania kresu. Podać stosowne przykłady.
- (2) Omówić pojęcie ciała uporządkowanego. Wykazać, że ciało uporządkowane  $\mathbb{Q}$  liczb wymiernych nie posiada własności istnienia kresów.
- (3) Podać dowód **Twierdzenia Dedekinda**: Istnieje ciało uporządkowane  $\mathbb{R}$  zawierające ciało uporządkowane  $\mathbb{Q}$  i posiadające własność istnienia kresów.
- (4) Sformułować własność Archimedesesa a następnie udowodnić, że ciało  $\mathbb{R}$  ma własność Archimedesesa.
- (5) Wykazać, że dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$  oraz dla każdej liczby naturalnej  $n \in \mathbb{N}$  istnieje dokładnie jeden element  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y > 0$  taki, że  $x^n = y$ .
- (6) Omówić pojęcie relacji równoważności i klasy abstrakcji. Podać stosowne przykłady.
- (7) Omówić pojęcie odwzorowania  $F : X \rightarrow Y$ , obrazu  $F(\mathcal{U})$ , przeciwobrazu  $F^{-1}(\mathcal{V})$ . Odwzorowanie, różnowartościowe, surjektywne i bijektywne. Zdefiniować zbiory równoliczne oraz przeliczalne. Podać stosowne przykłady.
- (8) Wykazać, że zbiór liczb wymiernych  $\mathbb{Q}$  jest zbiorem przeliczalnym.
- (9) Wykazać, że zbiór  $2^{\mathbb{N}}$  ciągów o wyrazach  $\{0, 1\}$  nie jest przeliczalny. Czy zbiór  $\mathbb{R}$  jest przeliczalny?
- (10) Pojęcie ciągu zbieżnego liczb rzeczywistych. Granica sumy i iloczynu ciągów zbieżnych. Twierdzenie o trzech ciągach.
- (11) Wykazać, że ciąg Cauchego liczb rzeczywistych jest zbieżny.
- (12) Sformułować i udowodnić Twierdzenie Stolz'a.
- (13) Wykazać zbieżność ciągu  $e_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Wykazać, że  $e(1) \in \mathbb{R}$  jest liczbą niewymierną.
- (14) Przestrzenie metryczne, kule w przestrzeni metrycznej ciągi zbieżne elementów przestrzeni metrycznej. Podać stosowne przykłady.
- (15) Rodzina podzbiorów otwartych przestrzeni metrycznej - definicja i własności. Rodzina podzbiorów domkniętych przestrzeni metrycznej - definicja i własności. Domknięcie podzbioru przestrzeni metrycznej.
- (16) Zwarte podzbiory przestrzeni metrycznej. Definicja i podstawowe własności. Zwartość a punkty skupienia.
- (17) Podzbiory zwarte  $\mathbb{R}$ .
- (18) Spójne podzbiory przestrzeni metrycznej. Spójne podzbiory  $\mathbb{R}$ .
- (19) Odwzorowania ciągłe przestrzeni metrycznych. Ciągowa charakteryzacja ciągłości. Charakteryzacja ciągłości w terminach zbiorów otwartych.
- (20) Obraz zbioru zwanego przy odwzorowaniu ciągłym. Obraz zbioru spójnego przy odwzorowaniu ciągłym.
- (21) Ciągłość jednostajna funkcji a zbiory zwarte.

- (22) Różniczkowalność funkcji, suma i iloczyn funkcji różniczkowalnych. Złożenie funkcji różniczkowalnych.
- (23) Uogólnione twierdzenie o wartości średniej. Znak pochodnej a monotoniczność funkcji.
- (24) Twierdzenie o istnieniu i różniczkowalności funkcji odwrotnej do  $f : ]a, b[ \mapsto \mathbb{R}$  takiej, że  $f'(x) \neq 0$ .
- (25) Twierdzenia de l'Hospitala.
- (26) Wzór Taylora.
- (27) Warunek konieczny i wystarczający istnienia ekstremum.
- (28) Funkcje wypukłe a druga pochodna.
- (29) Całka Riemanna, całka górna/dolna, funkcje całkwalne w sensie Riemanna, liniowość całki, sumy wypunktowane. Całkowalność funkcji ciągłych.
- (30) Zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego. Twierdzenie o całkowaniu przez części i o całkowaniu przez podstawienie.
- (31) Szeregi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  liczb zespolonych. Kryterium zbieżności Cauchy'ego. Szeregi o wyrazach dodatnich. Kryterium zagęszczeniowe.
- (32) Kryterium zbieżności szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  w terminach  $\sqrt[n]{|a_n|}$  oraz  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ .
- (33) Szeregi potęgowe, promień zbieżności szeregu potęgowego. Funkcja  $e^z$ , dla  $z \in \mathbb{C}$ .
- (34) Kryterium Abela, kryterium Dirichleta.
- (35) Szeregi bezwzględnie zbieżne, przestawianie kolejności wyrazów szeregu bezwzględnie zbieżnego, twierdzenie o iloczynie szeregów z których jeden jest bezwzględnie zbieżny a drugi jest zbieżny.
- (36) Ciągi funkcyjne i szeregi funkcyjne. Zbieżność punktowa jednostajna i niemal jednostajna. Twierdzenie o ciągłości granicy ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji ciągłych.
- (37) Twierdzenie o różniczkowalności granicy ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji różniczkowalnych. Twierdzenie o całkowaniu ciągu jednostajnie zbieżnego funkcji całkwalnych.
- (38) Konstrukcja funkcji różniczkowalnej, która nie ma pochodnej w żadnym punkcie.
- (39) Niemal jednostajna zbieżność szeregów potęgowych i różniczkowanie szeregów potęgowych.
- (40) Twierdzenie Abela o ciągłości funkcji zadanej szeregiem potęgowym na brzegu obszaru zbieżności.
- (41) Funkcje trygonometryczne oraz definicja liczby  $\pi$ .
- (42) Twierdzenie Weierstrassa.