AiG 28.02

Struktura endomorfizmu

Ale o co chodzi?

Zad.: X - p-ń wekt., $T \in L(X)$. Znaleźć bazę $\mathcal{E}$ p-ni X w której macierz $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest możliwie prosta.

(O rozw. tego zagadnienia będą ~3 wykłady.)

Np.: czy istnieje baza $\mathcal{E}$ t. że $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} ?$$

Operacje w $L(X)$. $T_1, T_2 \in L(X)$

wówczas: $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K} \quad \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in L(X)$

$T_1 \circ T_2 \in L(X)$

$1_X \in L(X)$ zachowuje się jak el. neutralny

$1_X \cdot T = T \cdot 1_X = T$

$(L(X), +, \circ, 1_X)$ jest algebrą z jedynką | algebra endomorfizmu

Aksjomaty: (1) $(L(X), +)$ jest p-nią wektorową

(2) $T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3$ łączność

(3) $T_1 (\lambda_1 T_2 + \lambda_2 T_3) = \lambda_1 T_1 \circ T_2 + \lambda_2 T_1 \circ T_3$ rozdzielność

1.) Wielomiany od endomorfizmów

Niech $T \in L(X)$. Wówczas $\mathbb{K}_n[\cdot] \ni w = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \longmapsto$

$\longrightarrow w(T) = a_0 1_X + a_1 T + \dots + a_n T^n \in L(X)$

jest liniowe

oraz $(w_1 \cdot w_2)(T) = w_1(T) \circ w_2(T)$

dalej powiemy jak liczyć $\exp(T)$, $\sin(T)$

Def 1 $T \in L(X)$ oraz Y będzie podprzestrzenią X.

Y jest pp-nią niezmienniczą dla T, jeśli $T(Y) \subseteq Y$

w języku macierzy operatora:

Jeśli Y jest niezm. oraz $(e_1, \ldots, e_k)$ jest bazą Y, to dopełniając $(e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$ do bazy X dostajemy

$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1l} & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ \alpha_{l1} & \alpha_{l2} & \cdots & \alpha_{ll} & \cdots & \\ 0 & 0 & & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \end{bmatrix}$$

cel: jak najwięcej zer

Df 2 $T \in L(X)$, $Y, Z \subseteq X$ - pp-nie oraz $X = Y \oplus Z$

para (Y, Z) jest redukująca dla T jeśli $T(Y) \subseteq Y$ oraz $T(Z) \subseteq Z$

w języku macierzy operatora: (jeszcze więcej zer)

Biorąc bazę $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_l, e_{l+1}, \ldots, e_n)$ gdzie $(e_1 \ldots e_l)$ jest bazą Y oraz $(e_{l+1}, \ldots, e_n)$ jest bazą Z mamy

$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1l} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{l1} & \cdots & \alpha_{ll} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{l+1,l+1} & \cdots & \alpha_{l+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{n,l+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jak znajdować podprzestrzenie niezm. i pary podp. redukujące?

$A_2 6$ 28.02 k2

Operatory rzutowe

(Df) Operator $P \in L(X)$ nazywamy rzutowym jeśli $P^2 = P$

Przykład: $X = Y \oplus Z$. Zdefiniujmy operator $P \in L(X)$: $P(y+z) = y$

Wówczas P jest rzutowy: $P^2(y+z) = P(P(y+z)) = \underset{y+0}{P(y)} = y = P(y+z) \Rightarrow$

$\Rightarrow P^2 = P$

(STW) $P \in L(X)$ op. rzutowym. Zdefiniujmy $Y = P(X)$ oraz

$Z = (1-P)(X)$ $\quad \left[(1-P)(y+z) = z \right]$

Wówczas $X = Y \oplus Z$ oraz $P(y+z) = y$

D. Niech $x \in X$. wówczas $x = (1-P+P)x = \underset{\in Z}{(1-P)(x)} + \underset{\in Y}{P(x)}$

Ponadto jeśli $x \in Y \cap Z$ to $x = P(x_1) = (1-P)(x_2)$

Ale $(1-P)P(x_1) = (P-P^2)(x_1) = 0$

oraz $P(1-P)(x_2) = (P-P^2)(x_2) = 0$

$x = (1-P)(x) + P(x) = (1-P)P(x_1) + P(1-P)x_2 = 0$

$Y \cap Z = \{0\}$ czyli $X = Y \oplus Z$

Niezmienniczość (redukowanie) a rzuty

(Tw) $T \in L(X)$ oraz $P \in L(X)$ rzutem

(1) $Y = P(X)$ jest podprzestrzenią niezmienniczą $\Leftrightarrow TP = PTP$

(2) $(Y = P(X), Z = (1-P)(X))$ jest parą redukującą $\Leftrightarrow$ $TP = PT$

D. (ad 1) $\Rightarrow$ $x = y + z \in X \Rightarrow Ty \in Y$, $PTy = Ty$

stąd $TPx = TP(y+z) = Ty$

z drugiej strony $PTPx = PTy = Ty$ "

$\Leftarrow$ jeśli $TP = PTP$ to biorąc $x = y$ dostajemy

$Ty = TPx = PTPx = PTy$ czyli $Ty \in Y$

(rzut na Ty nie zmienia Ty)

więc Y pod. niezmiennicza

(ad 2) $\Rightarrow$ (Y, Z) para redukująca oraz $x = y + z \neq 0$

$TPx = Ty$ a $PTx = P(\underset{Y}{Ty} + \underset{Z}{Tz}) = Ty \Rightarrow TP = PT$

$\Leftarrow$ jeśli P rzutem oraz $PT = TP$ to wystarczy wykazać, że $Y = P(X)$ oraz $Z = (1-P)(X)$ są niezmiennicze dla T.

Biorąc $x = y \in Y$ mamy $PTy = TPy = Ty \Rightarrow Ty \in Y$

czyli Y niezm.

analogicznie Z niezm. i mamy parę redukującą

$z \in Z$ $(1-P)z = z$ mamy $(1-P)Tz = Tz - PTz =$

$= Tz - TPz = T(1-P)z = Tz \Rightarrow Tz \in Z$

więc i Z niezm. $\square$

Wektory i wartości własne op $T \in L(X)$

(D3) Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{K}$ jest wartością własną operatora $T \in L(X)$ jeśli $\exists x \in X \setminus \{0\}$ t. że $Tx = \lambda \cdot x \Leftarrow x$ wektorem własnym op T o wartości własnej λ.

AzG 29.02 K3

(STw) $\lambda \in \mathbb{K}$ wartością wł. operatora $T \in L(X) \Leftrightarrow \det(T-\lambda \mathbb{1}_X)=0$

(Df) wielomian st. $\dim X$ $\mathbb{K} \ni x \mapsto \det(T-\lambda\mathbb{1}_X) \in \mathbb{K}$ nazywamy wielomianem charakterystycznym operatora T i oznaczamy symbolem $w_T(\lambda)$. Czyli wart. własna jest pierwiastkiem wiel. charakt. w_T

D. λ w. wł $\Leftrightarrow \exists x \in X \setminus \{0\} : Tx = \lambda x \Leftrightarrow \ker(T-\lambda\mathbb{1}_X) \neq \{0\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow T-\lambda\mathbb{1}_X$ nieodwracalny $\Leftrightarrow \det(T-\lambda\mathbb{1}_X)=0$

(Df) 1) krotnością algebraiczną w. wł λ nazywamy krotność λ jako pierwiastka wielomianu $w_T(\lambda)$
2) krotnością geometryczną nazywamy $\dim\ker(T-\lambda\mathbb{1}_X)$
3) T diagonalizowalny jeśli $\exists$ baza X zł. z wekt wł. op $T \in L(X)$

(Tw) Cayleya – Hamiltona

Niech $T \in L(X)$ oraz w_T będzie wielomianem charakterystycznym T. Wówczas $w_T(T)=0$

D. Niech $x \in X$ Wykażemy, że $\underset{\underset{L(X)}{\uparrow}}{w_T}(T)\underset{\underset{X}{\uparrow}}{x}=0 \Rightarrow w_T(T)=0$

Niech k - najmn. liczba naturalna t, że $(x, Tx, \dots, T^{k-1}x)$ są liniowo niezależne

Stąd $\exists \alpha_0 \dots \alpha_{k-1} : T^k(x) = \alpha_0 x + \alpha_1 Tx + \dots + \alpha_{k-1} T^{k-1} x$ (*)

Dopełniamy $\mathcal{E}_0$ do bazy $\mathcal{E} = (x, Tx, \dots, T^{k-1}x, e_k, \dots, e_n)$

Wówczas
$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & \alpha_0 & \\ 1 & 0 & & \alpha_1 & C \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \alpha_{k-1} & \\ 0 & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & W(C)\end{array}\right]$$

$$\det(T-\lambda \mathbb{1}) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & & & & \\ 1 & -\lambda & & & \text{cokolwiek} \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & \alpha_{k-1}-\lambda & \\ 0 & & & & C-\lambda \end{bmatrix} = \det(C-\lambda\mathbb{1})\cdot\det\begin{bmatrix} -\lambda & & & \alpha_0 \\ 1 & -\lambda & & \alpha_1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \alpha_{k-1}-\lambda \end{bmatrix}$$

rozwijamy wzgl. ost. kolumny

$$= \det(C-\lambda\mathbb{1})\cdot\Big((-\lambda)^{k-1}(\alpha_{k-1}-\lambda) + (-1)\cdot\alpha_{k-2}\cdot(-\lambda)^{k-2} + (-1)^2\alpha_{k-3}(-\lambda)^{k-3} + (-1)^3\alpha_{k-4}(-\lambda)^{k-4} + \ldots + \alpha_0(-1)^{k-1}\Big) =$$

wykr. ost. w. i ost. kol.

$$w_T(\lambda) = \det(C-\lambda\mathbb{1})(-1)^{k+1}\left(-\lambda^k+\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ldots+\alpha_{k-1}\lambda^{k-1}\right)$$

$$w_T(T)x = v(T)\left(-T^k+\alpha_0\mathbb{1}+\alpha_1 T+\ldots+\alpha_{k-1}T^{k-1}\right)x =$$

$$= v(T)\left(-T^k x+\alpha_0 x+\alpha_1 Tx+\ldots+\alpha_{k-1}T^{k-1}x\right) \underset{(*)}{=} 0$$

Struktura Endomorfizmu 6.03.2012

$T \in L(X)$. W jakiej bazie $\mathcal{E}$ p-ni X macierz $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ wygląda najprościej?
Czy $\exists$ baza $\mathcal{E}$ w której macierz $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna?

Def. Niech $T \in L(X)$. Jeśli $\exists$ baza $\mathcal{E}$ p-ni X t.że $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ jest macierzą diagonalną to mówimy, że T jest operatorem diagonalizowalnym.

Wartość i wektor własny: $Tx = \lambda \cdot x$, $x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$

Wielomian charakterystyczny: $W_T(\lambda) = \det(T - \lambda 1_X)$
λ jest wartością własną $\iff$ $W_T(\lambda) = 0$

Def. Zbiór w.wł. operator T nazywamy spektrum op. T i oznaczamy symbolem $S_p(T)$

Krotność algebr. wart. wł. $\lambda_i \in S_p(T)$ - jest krotność λ_i jako pierwiastka wielomianu $W_T(\lambda)$

Krotność geometryczna $:= \underbrace{\dim \ker (T - \lambda_i 1_X)}_{\text{podprzestrzeń wekt. własnych}}$

Def. Niech $T \in L(X)$ o spektrum $S_p(T)$

Przestrzenią własną związaną z wartością własną $\lambda_i \in S_p(T)$ nazywamy podprzestrzeń $\ker(T - \lambda_i \cdot 1_X) \subseteq X$.

Przestrzenią pierwiastkową związaną z wartością własną $\lambda_i \in S_p(T)$ nazywamy podprzestrzeń $\ker(T - \lambda_i 1_X)^{n_i}$ gdzie n_i jest krotnością algebraiczną λ_i. Przestrzeń tą ozn. symbolem X_{λ_i}

$$X_{\lambda_i} \subseteq X$$

Obserwacja:

$$\ker(T-\lambda_i 1_X) \subseteq \ker(T-\lambda_i 1_X)^{n_i} \quad \text{dla} \quad n_i \geq 1$$

bo jeśli $(T-\lambda_i 1_X)x = 0$ to $(T-\lambda_i 1_X)^{n_i} x = 0$

Np:

Operator obrotu $\mathbb{R}^2$ o 90° przeciwnie do kier. wsk. zegara nie ma wart. wł. (ten op. w bazie stand.)

$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$w_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = (\lambda+i)(\lambda-i)$$

Dalej zakładamy, że $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad$ ($\exists$ 2 wart. wł. $i, -i$)

Obserwacja: Przestrzenie pierwiastkowe są niezmiennicze ze względu na T:

$$x \in X_{\lambda_i} = \ker(T-\lambda_i \mathbb{1})^{n_i} \Rightarrow Tx \in X_{\lambda_i}$$

bo $(T-\lambda_i \mathbb{1}_X)^{n_i} Tx = T(T-\lambda_i \mathbb{1}_X)^{n_i} x = T \cdot 0 = 0$

Tw.

Niech X będzie p-nią nad $\mathbb{C}$, $T \in L(X)$ będzie operatorem o spektrum $S_p(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$ i niech $n_1, \dots, n_r$ będą algebraicznymi krotnościami T. Wówczas $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$ gdzie $\ker(T - \lambda_i \mathbb{1}_X)^{n_i} = X_{\lambda_i}$ oraz $\dim X_{\lambda_i} = n_i$.

Wniosek: Niech $\mathcal{E}$ będzie bazą zgodną z rozkładem $X = \bigoplus_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$ (tzn. $\mathcal{E} = (x_1, \dots, x_n)$ oraz $(x_1, \dots, x_{n_1})$ jest bazą X_{λ_1}, $(x_{n_1+1}, \dots, x_{n_2})$ jest bazą X_{λ_2}, ..., $(x_{n_r+1}, \dots, x_{n_r})$ jest bazą X_{λ_r}) Wówczas:

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix}$$

gdzie $A_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{C})$

Dowód tw.:

niech $W_T(\lambda)$ będzie wielomianem charakt. T

$W_T(\lambda) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{n_r}$ gdzie $n = n_1 + \dots + n_r = \dim X$

Zdefiniujmy $w_i(\lambda) = \dfrac{W_T(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{n_1}}$ dla $i = 1, \dots, r$

Jest jasne: w_i są wielomianami oraz $NWD(w_1, \dots, w_r) = 1$ bo rodzina wielomianów $w_1, \dots, w_r$ nie mają wspólnego pierw.

Wówczas istnieją wielomiany $u_1, \dots, u_r$ t, że $(NWD) = 1 = u_1 w_1 + u_2 w_2 + \dots + u_r w_r$

Zdefiniujmy rodzinę endomorfizmów: $P_i \equiv v_i(T) w_i(T)$, (oczywiście $P_i \in L(X)$)

Obserwacje:

(1) $P_1 + \ldots + P_r = v_1(T)w_1(T) + \ldots + v_r(T)w_r(T) = \mathbb{1}_X$

(2) $P_j P_i = 0$ dla $i \neq j$

$\exists\, v$ - wielomian: $w_i \cdot w_j = v \cdot w_T$

~~gdzie~~ gdyż $P_j P_i = \cancel{w_j(T) \cdot w_i(T)} = v \cdot w_T = v(T) \cdot w_T(T) = 0$ ← tw. Cayleya-Hamiltona

$\quad\quad P_j P_i = u_j(T) \cdot w_j(T) \cdot u_i(T) w_i(T)$

(3) $P_i^2 = P_i$ bo $P_i = P_i \mathbb{1}_X = P_i \sum_{j=1}^{r} P_j = \sum_{1}^{r} P_i P_j = P_i^2$, $\quad P_i P_j = 0$ dla $i \neq j$

(4) P_i jest rzutem na $X_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1}_X)$

$$x = \sum_{j=1}^{r} P_j x = P_i x + \sum_{j \neq i} P_j x = P_i x$$

$$P_j x = v_j(T) \cdot w_j(T)\, x = v_j(T)\, w(T)\, \underbrace{(T - \lambda \mathbb{1})^{n_i} x}_{0}$$

stąd $x \in P_i X$

czyli $X_{\lambda_i} \subseteq P_i X$

W drugą stronę: jeśli $x \in P_i X$ to $(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} x = (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} \cdot v_i(T) \cdot w_i(T) x =$

$$= v_i(T) w_T(T) x = 0$$

$P_i x = x$, $\quad P_i x = u_i(T) w_i(T) x = x$

Skoro $P_i X = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$ to $\forall x \in X$ mamy $x = \sum_{j=1}^{r} P_j x$, $\quad P_j x \in X_{\lambda_j}$

Każdy wektor jest sumą wektorów z X_{λ_i}

Ponadto jeśli $x = y_1 + \ldots + y_r$ gdzie $y_i \in X_{\lambda_i}$ to

$$P_i x = P_i y_1 + \ldots + P_i y_i + \ldots + P_i y_r = \underbrace{P_i P_1 y_1}_{0} + \ldots + P_i y_i + \ldots + \underbrace{P_i P_r y_r}_{0} =$$

$= P_i y_i = y_i$ rozkład jest jednoznaczny $\Rightarrow X = \bigoplus_{i=1}^{r} X_{\lambda_i}$

Wykażemy, że $\dim X_{\lambda_i} = n_i$

Biorąc bazę zgodną z rozkładem dostajemy macierz postaci

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & \ddots & A_j & \\ 0 & & \ddots & A_r \end{bmatrix}$$

$$\det\left([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} - \lambda \mathbb{1}_X\right) = \det(A_1 - \lambda\mathbb{1}) \cdot \ldots \cdot \det(A_j - \lambda \mathbb{1}) \cdot \ldots \cdot \det(A_r - \lambda \mathbb{1})$$

wartości własna macierzy A_j jest w-własną op. T.

Zauważmy: jedyne możliwości jest taka, że w-wł A_j jest równe λ_j. Dlaczego? Jeśli λ_i jest w.wł. A_j to

$$\exists_{v \neq 0} v \in X_{\lambda_j} \text{ t. że } Tv = \lambda_i v \Rightarrow v \in \ker(T - \lambda_i \mathbb{1}_X) \subseteq \underbrace{\ker(T - \lambda_i \mathbb{1}_X)^{n_i}}_{= X_{\lambda_i}} \subseteq$$

czyli $v \in X_{\lambda_i} \cap X_{\lambda_j} \Rightarrow v = 0$ sprzeczność $(v$ miało być $\neq 0)$

Ponieważ $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ to $\det(A_j - \lambda\mathbb{1}) = (-1)^{\dim X_{\lambda_j}} \cdot (\lambda - \lambda_j)^{\dim X_{\lambda_j}}$

Z drugiej strony $w_T(T) = (-1)^n \cdot (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{n_r} =$

$$= (-1)^{\dim X_{\lambda_1}} \cdot (\lambda - \lambda_1)^{\dim X_{\lambda_1}} \cdot \ldots \cdot (-1)^{\dim X_{\lambda_r}} \cdot (\lambda - \lambda_r)^{\dim X_{\lambda_r}}$$

stąd $\dim X_{\lambda_1} = n_1$

$\dim X_{\lambda_2} = n_2$

$\vdots$

$\dim X_{\lambda_r} = n_r$

$\blacksquare$

W

Przypomnienie: X - p-ń nad $\mathbb{C}$, $T \in L(X)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - wartości własne T $(\exists x \neq 0 : Tx = \lambda_k x)$

$n_1, \dots, n_k$ - krotności algebraiczne

$X_{\lambda_i} = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$, $X = \oplus X_{\lambda_i}$ $(*)$ suma prosta p-ni pierw.

$\dim X_{\lambda_i} = n_i$; $TX_{\lambda_i} \subseteq X_{\lambda_i}$

Biorąc bazę $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ zgodną z rozkładem $(*)$ dostajemy

$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} T_1 & & & 0 \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & T_k \end{bmatrix}$$

Czy można dalej uprościć każdy z bloków T_i ?

Def: operator $T \in L(X)$ nazywamy diagonalizowalnym jeśli $\exists$ baza $\mathcal{E}$ p-ni X złożona z wektorów własnych operatora T.

Przykład operatora który nie jest diagonalizowalny

$X = \mathbb{C}^2$ $\quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Gdyż $w_T(\lambda) = \det(T - \lambda \mathbb{1}) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$

$\lambda_1 = 0$
$n = 2$ gdyby ~~???~~ istniała baza wektorów własnych to byłyby to wektory z p-ni $\ker(T - 0\mathbb{1}) = \ker T$.

Ale $\ker T = \{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \} = \{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; x_2 = 0 \} =$

$= \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle \Rightarrow \dim \ker T = 1 < 2$ (więc nie istnieje baza w której op. jest diagonalny.)

Twierdzenie

X - sk. wym. nad $\mathbb{C}$, $T \in L(X)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - w. własne, $n_1, \dots, n_k$ - krot. algeb.

$\ker(T - \lambda_i \mathbb{1}) = \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} \Leftrightarrow T$ - diagonalizowalny

II

W szczególności jeśli $n_1 = \ldots = n_k = 1$ to T - jest diagonalizowalny

np. $X = \mathbb{C}^2$, $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad w_T(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)(\lambda + i)$

$w_T(\lambda) = \det(T - \lambda \mathbb{1})$

$\ker(T - i\mathbb{1}) = \left\langle \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

$\ker(T + i\mathbb{1}) = \left\langle \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

W bazie $\mathcal{E} = \left(\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ mamy $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

Dowód twierdzenia:

$\Rightarrow$

Biorąc bazę $\mathcal{E}$ zgodną z rozkładem $X = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})$

mamy $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ldots \ \lambda_1}^{n_1 \text{ razy}} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_k \ \ldots \ \lambda_k}^{n_k \text{-razy}} \end{bmatrix}$

$\Leftarrow$ Niech $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ będzie bazą wektorów własnych.

Zakładamy, że pierwsze l_1 wektorów są wektorami własnymi o wart. własnej λ_1, kolejne l_2 wektorów — // — λ_2 itd...

Skoro $\ker(T - \lambda_i \mathbb{1}) \subseteq \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$ to

$n = l_1 + l_2 + \ldots + l_k \leq \dim\ker(T - \lambda_1 \mathbb{1}) + \ldots + \dim\ker(T - \lambda_k \mathbb{1}) \leq$

$\leq \dim\ker(T - \lambda_1 \mathbb{1})^{n_1} + \ldots + \dim\ker(T - \lambda_k \mathbb{1})^{n_k} =$

$= n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Skoro $l_i \leq n_i \ \forall i$ oraz $l_1 + \ldots + l_k = n_1 + \ldots + n_k$ to

$l_1 = n_1$

$l_2 = n_2$

...

Stąd $\dim\ker(T - \lambda_i \mathbb{1}) \geq l_i = n_i$; ponieważ $\dim\ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} = n_i$ to zawieranie

$l_i = n_i$ $\quad$ $\ker(T - \lambda_i \mathbb{1}) \subseteq \ker(T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$ jest równością.

(op. dim.) ◻

Def:

Niech $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1} \in \{0,1\}$

Klatką Jordana o w. wł. λ nazywamy macierz

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \qquad \text{np.} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Niech $B \in M_{m\times m}(\mathbb{C})$ oraz $C \in M_{l\times l}(\mathbb{C})$. Sumą prostą macierzy B i C nazywamy macierz postaci

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \in M_{m+l, m+l}(\mathbb{C})$$

TWIERDZENIE O ISTNIENIU BAZY JORDANA

X – nad $\mathbb{C}$, $T \in L(X)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – w. wł., $n_1, \dots, n_k$ – krotności algebr. Wówczas $\exists$ baza $\mathcal{J}$ p-ni X w której $[T]_{\mathcal{J}}^{\mathcal{J}}$ jest sumą prostą klatek Jordanowskich $\begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \varepsilon_{n-1} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{n_i\times n_i}(\mathbb{C})$

Bazę $\mathcal{J}$ nazywamy bazą Jordanowską dla operatora T.

Obserwacja:

Zauważmy, że w bazie $\mathcal{F}$ zgodnej z rozkładem na p-nie pierwiastkowe: $X = \bigoplus_{i=1}^{k} X_{\lambda_i}$, macierz $[T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} T_1 & & 0 \\ & T_2 & \\ 0 & & \ddots \; T_k \end{bmatrix}$ gdzie

~~#1~~ T_i jest macierzą operatora $T|_{X_{\lambda_i}}$

$T|_{X_{\lambda_i}} \in L(X_{\lambda_i})$: $T|_{\lambda_i} x = \underset{\underset{X_\lambda}{\cap}}{Tx} \quad \forall x \in X_{\lambda_i}$.

Zauważmy, że $\left(T|_{X_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathbb{1}_{X_{\lambda_i}}\right)^{n_i} = 0$ bo $X_{\lambda_i} = \ker(T-\lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$

Def: X - p-ń nad $\mathbb{C}$, $N \in L(X)$. Mówimy, że N jest nilpotentnym jeśli $\exists\ l$ t, że $N^l = 0$. Najmniejsze takie l nazywamy stopniem nilpotentności operatora N.

np. $Y = \mathbb{C}_n[\cdot]$, $N = \frac{d}{dz}$ $\quad \} \frac{d}{dz} z^n = n z^{n-1}$ - w końcu się wyzeruje

$N^{n+1} = 0$

$\mathcal{F} = \left(1, z, \frac{z^2}{2}, \dots, \frac{z^n}{n!}\right)$

$$[N]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & & 0 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech X - nad $\mathbb{C}$, oraz $N \in L(X)$ - nilpotentny o ~~krotności~~ stopniu nilpotentności l.

Niech $x \in X$ wektor taki, że $x \neq 0$, $Nx \neq 0, \dots, N^{l-1}x \neq 0$.

Wówczas: (1) wektory $x, Nx, \dots, N^{l-1}x$ są l.n.z.

(2) niech $Y = \langle x, Nx, \dots, N^{l-1}x \rangle$. Wówczas

(a) $NY \subseteq Y$ $\}$ Y jest podprzestrzenią niezmienniczą

(b) $\exists\ Z \subseteq X$ t, że $NZ \subseteq Z$ oraz $X = Y \oplus Z$

Uwaga: Zauważmy, że $N|_Z \in L(Z)$ jest operatorem nilpotentnym o st. nilpotentności $l' \leq l$

biorąc $z \in Z$ t, że $N^{l'-1} z \neq 0$ dostajemy

$\tilde{Y} = \langle z, Nz, \dots, N^{l'-1} z \rangle$

Znajdujemy $\tilde{Z}$: $Z = \tilde{Y} \oplus \tilde{Z}$, obcinamy $N|_{\tilde{Z}}$ itd

W końcu dostajemy bazę $\mathcal{F} = (N^{l-1}x, \dots, x, N^{l'-1}z, \dots, z, \dots)$ t. że

$$[N]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

Widać, że dla operatora nilpotentnego istnieje baza Jordana

Stwierdzenie

X, N – j.w. Wówczas $w_N(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$ gdzie $n = \dim X$

dowód:

Niech λ będzie w. wł. operatora N. $\exists x \neq 0$

$$Nx = \lambda x \Rightarrow \underbrace{N^l x}_{=0} = \lambda^l x \Rightarrow \lambda^l = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Stąd $w_N(\lambda) = a \lambda^n$ gdzie $a \in \mathbb{C}$

$$w_N(\lambda) = \det(N - \lambda \mathbb{1}) \Rightarrow a = (-1)^n$$

W. 20.03.2012

Twierdzenie

X - nad $\mathbb{C}$, $N \in L(X)$ - nilpotentny st. l. (tzn. $N^{l-1} \neq 0$, $N^l = 0$)

Niech $x \in X$: $N^{l-1} x \neq 0$

Wówczas (1) układ $\{x, Nx, \dots, N^{l-1}x\}$ jest liniowo niezależny

(2) $Y = \langle x, Nx, \dots, N^{l-1}x \rangle$

Wówczas Y jest podprzestrzenią N-niezmienniczą

tzn. $NY \subseteq Y$, oraz $\exists$ podprzestrzeń Z która jest N niezmiennicza

taka, że $Y \cap Z = \{0\}$ oraz $Y + Z = X$ (tzn. $X = Y \oplus Z$)

Dowód (1)

Przypuśćmy, że $\alpha_0 x + \alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{l-1} N^{l-1} x = 0$

Przykładamy N^{l-1} do obu stron i dostajemy

$$\alpha_0 \underbrace{N^{l-1}x}_{\neq 0} + \alpha_1 \underbrace{N^l x}_{=0} + \dots + \alpha_{l-1} \underbrace{N^{2l-1}}_{=0} x = 0$$

$$\Downarrow$$

$\alpha_0 = 0$

Przykładamy teraz N^{l-2} do obu stron $\Rightarrow \alpha_1 = 0$

$\vdots$

— // — $\alpha_{l-1} = 0$

Dowód (2) Indukcja ze względu na stopień nilpotentności

Przypuśćmy, że (2) zachodzi dla operatorów nilpotentnych st. $l-1$

Niech $\tilde{X} = NX$. Zauważmy, że $N\tilde{X} = N(NX) \subseteq NX = \tilde{X}$

Niech $\tilde{N} = N|_{\tilde{X}} \in L(\tilde{X})$. Zauważmy, że $\tilde{N}$ jest nilpotentny st. $l-1$:

$$\tilde{N}^{l-1} N x' = N^{l-1} N x' = N^{l} x' = 0 \Rightarrow \tilde{N}^{l-1} = 0 \quad \forall x' \in X$$

Ale $\tilde{N}^{l-2} \neq 0$ bo $\tilde{N}^{l-2} N x \neq 0$

Zastosujmy więc tw. do $\tilde{N} \in L(\tilde{X})$, $\tilde{x} = Nx$ oraz

$$\tilde{Y} = \langle \tilde{x}, \tilde{N}\tilde{x}, \dots, \tilde{N}^{l-2}\tilde{x} \rangle = \langle Nx, N^2 x, \dots, N^{l-1} x \rangle$$

$\Rightarrow \exists$ podprzestrzeń $\tilde{Z} \subseteq \tilde{X}$, t. że $\underbrace{\tilde{Z} \text{ jest } \tilde{N}\text{-niezmiennicza}}_{\boxed{N\tilde{Z} = \tilde{N}\tilde{Z} \subseteq \tilde{Z}}}$

oraz $\tilde{X} = \tilde{Y} \oplus \tilde{Z}$

Konstruujemy p-ń Z:

Niech $Z_0 \subseteq X$; $Z_0 = \{x \in X : Nx \in \tilde{Z}\}$

Własności Z_0:

(1) $Y + Z_0 = X$ Niech $x \in X$, $Nx \in \tilde{Y} \oplus \tilde{Z} \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_{l-1} \in \mathbb{C}$

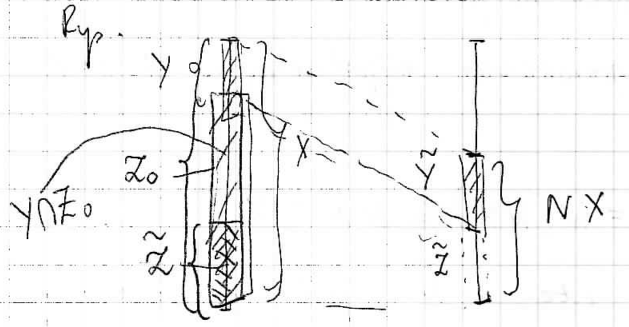
oraz $\tilde{z} \in \tilde{Z}$: $Nx = \alpha_1 Nx + \dots + \alpha_{l-1} N^{l-1} x + \tilde{z} =$

$$= \underbrace{N(\alpha_1 x + \dots + \alpha_{l-1} x)}_{\overset{def}{} \; y \in Y} + \tilde{z}$$

$$Nx - Ny = N(x - y) = \tilde{z} \in \tilde{Z}$$

Stąd $x - y \in Z_0$ (patrz def. Z_0) oraz $x = \underbrace{x - y}_{\in Z_0} + \underbrace{y}_{\in Y}$

(2) $\tilde{Z} \subseteq Z_0$ – bo $\tilde{Z}$ jest N niezmiennicza : $N\tilde{Z} \subseteq \tilde{Z}$



(3) $\tilde{Z} \cap (Y \cap Z) = \{0\}$ – bo $\tilde{Z} \cap Y \cap Z_0 = \tilde{Z} \cap Z_0 \cap Y = \tilde{Z} \cap Y$

trzeba pokazać, że $\tilde{Z} \cap Y = \{0\}$

Niech $v \in \tilde{Z} \cap Y \Rightarrow v \in Y$ to $\exists\ \alpha_0, \dots, \alpha_{l-1}$ t. że $v = \alpha_0 x + \dots + \underbrace{\alpha_{l-1} N^{l-1} x}_{\in \tilde{Z}}$

$\Rightarrow Nv \in \tilde{Z}$, $Nv = \underbrace{\alpha_0 N x + \dots + \underbrace{\alpha_{l-2} N^{l-1} x}_{\in \tilde{Z}} + 0}_{\in \tilde{Y}}$

Ponieważ $\tilde{Y} \cap \tilde{Z} = \{0\}$ to $\alpha_0 N x + \dots + \alpha_{l-2} N^{l-1} x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_0 = 0, \dots, \alpha_{l-2} = 0$ – z l.n.z.

Widzimy, że $v = \alpha_{l-1} N^{l-1} x \in \tilde{Z} \cap \tilde{Y}$.

Ponieważ $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = 0$ to $\alpha_{l-1} = 0$. Czyli $v = 0$.

Skoro $\tilde{Z} \cap (Y \cap Z_0) = \{0\}$ to $\tilde{Z} \oplus (Y \cap Z_0) \subseteq Z_0$

Niech V będzie podprzestrzenią Z_0 t. że $(\tilde{Z} \oplus Y \cap Z_0) \oplus V = Z_0$

{ Uwaga V istnieje ale nie musi być N-niezmiennicza }

Definiujemy $Z \subseteq X$: $Z = \tilde{Z} \oplus V$. Czy Z spełnia pkt (2) twierdzenia?

~~Efekt tak jak~~

- Z jest N-niezmiennicza: bo $N\tilde{Z} \subseteq \tilde{Z}$ oraz $V \subseteq Z_0$

w szczególności $NV \subseteq NZ_0 \subseteq \tilde{Z}$

A stąd $\underbrace{N(\tilde{Z} \oplus V)}_{\substack{\| \\ N(Z)}} \subseteq \tilde{Z} \subseteq \tilde{Z} \oplus V = Z$

- Z jest dopełniająca dla Y: $X = Y \oplus Z$

bo $Y \cap (\underbrace{\tilde{Z} \oplus V}_{\substack{\cap \\ Z_0}}) \subseteq Y \cap \underbrace{(Z_0 \cap (\tilde{Z} \oplus V))}_{\text{bo } \tilde{Z} \oplus V \subseteq Z_0} = (Y \cap Z_0) \cap (\tilde{Z} \oplus V) = \{0\}$ z pktu 3 pamięć

Dalej $Y + Z = X$ bo $\underbrace{Y + (Y \cap Z_0)}_{Y} + \underbrace{Z}_{\substack{\| \\ \tilde{Z}+V}} = Y + \underbrace{(Y \cap Z_0) + \tilde{Z} + V}_{Z_0} =$

$= Y + Z_0 = X$ patrz (1) w dowodzie

Na zeszłym wykładzie pokazaliśmy, że z powyższego tw.

wynika istnienie bazy Jordanowskiej $(\mathcal{E})$ dla N.

$$\mathcal{E} = \{ \underbrace{N^{k-1}x, \dots, Nx, x}_{Y};\ \underbrace{N^{l'-1}x', \dots, Nx', x'}_{Z}, N^{l''-1}x'', \dots, x'' \text{ itd} \}$$

$$[N]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{matrix}}_{Y} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & & & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{matrix}}_{Z} \end{bmatrix}$$

Ogólnie: niech $T \in End(X)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – w.wł. op. T o krotnościach $n_1, \dots, n_k$. Wówczas $X = \bigoplus_{i=1}^{k} X_{\lambda_i}$

$$X_{\lambda_i} = \ker (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$$

X_{λ_i} – jest T niezmiennicza, oraz $T_i \equiv T|_{X_{\lambda_i}} \in L(X_{\lambda_i})$ ma
jedno tego gwarantuje

~~ma~~ następującą własność:

$$(T_i - \lambda_i \mathbb{1}_{X_{\lambda_i}})^{n_i} = 0$$

A więc $T_i - \lambda_i \mathbb{1}_{X_{\lambda_i}} \in L(X_{\lambda_i})$ jest nilpotentny

istnieje baza $\mathcal{E}_i$ p-ni X_{λ_i} która jest Jordanowska

dla $T_i - \lambda_i \mathbb{1}_{X_{\lambda_i}}$

Zatem $[T_i]_{\mathcal{E}_i}$ jest klatką Jordanowską : $\cancel{[\mathcal{E}_i]}$

$$[T_i]_{\mathcal{E}_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & \varepsilon_1^{n_i} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n_i-1}^{n_i} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_j^{n_i} \in \{0,1\}$$

Biorąc bazę $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \ldots \cup \mathcal{E}_k$ widzimy, że

$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ jest sumą prostą klatek Jordanowskich.

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$ za tydzień!

$\dot{x} = ax \rightsquigarrow c \cdot e^{at}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

W

26.03.2012

Przypomnienie: Wielomiany od operatora

$w \in \mathbb{C}_n[\cdot]$, $w(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$. Niech $T \in L(X)$ gdzie X - p-ń nad $\mathbb{C}$.

Definiujemy $w(T) \in L(X)$, $w(T) = a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n$. $(*)$

Motywacja: rozważmy r-nie różniczkowe $x(t) = Ax(t)$

$x: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Rozwiązanie:

$x(t) = e^{tA} x_0$ gdzie $x_0 \in \mathbb{C}$

Pomysł: rozszerzyć $(*)$ $\boxed{e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \; ??}$

Np. Przypuśćmy, że $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$e^{tA} = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t})$

Funkcje zadawane przez szeregi potęgowe

Def.: Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg liczb zespolonych

$D = \{z \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ - jest bezwzględnie zbieżny$\}$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \forall z \in D$

W ten sposób dostajemy f-cję $f: D \longrightarrow \mathbb{C}$.

Np.: $a_n = \frac{1}{n!}$

$D = \mathbb{C}$

$f(z) = e^z$

Def.: funkcja f zadana przez szereg potęgowy $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

jest całkowita jeśli $D=\mathbb{C}$ gdzie $f: D\to \mathbb{C}$ j.w.

Kryterium Cauchego ① $\underline{f \text{ jest całkowita}} \iff \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}=0$

② jeśli f - całkowita to $\forall z_0\in\mathbb{C}$

$\underline{\exists (b_n)_{n\in\mathbb{C}} \text{ t, że } \quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n \text{ oraz}}$

$\underline{\limsup |b_n|^{\frac{1}{n}}=0}$

③ Niech $T\in L(X)$ oraz f będzie funkcją całkowitą.

Wówczas $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ jest zbieżny do pewnego operatora na X

który oznaczamy symbolem:

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

Jak wyliczać $f(T)$?

METODA 1. (Wykorzystuje rozkład X na p-nie pierwiastkowe operatora T)

$\lambda_1,\dots,\lambda_k$ wartości własne op. T o krotnościach algebraicznych

$n_1,\dots,n_k$. Niech $X_{\lambda_i}=\ker(T-\lambda_i \mathbb{1})^{n_i}$.

Wówczas $X=\bigoplus_{i=1}^{k} X_{\lambda_i}$. Niech P_{λ_i} będzie rzutem na X_{λ_i}:

$$P_{\lambda_i}(x_1+\dots+x_n)=x_i \qquad \text{gdzie } x_i\in X_{\lambda_i}$$

Uwaga!

$$TP_{\lambda_i}x\in X_{\lambda_i} \Rightarrow P_{\lambda_i}TP_{\lambda_i}x=TP_{\lambda_i}x \quad \forall x\in X$$

W takim razie $\quad P_{\lambda_i}TP_{\lambda_i}=TP_{\lambda_i}$

Ponadto $\quad \mathbb{1}_X = \sum_{i=1}^{k} P_{\lambda_i}$

Przypuśćmy, że f jest całkowita:

$$f(T) = f(T)\mathbb{1}_X = \sum_{i=1}^{k} \left(f(T) \cdot P_{\lambda_i} \right) \qquad (**)$$

$T^n P_{\lambda_i} = T \cdot \ldots \cdot T P_{\lambda_i} = T \cdot \ldots \cdot P_{\lambda_i} T P_{\lambda_i} = (T P_{\lambda_i})^n$

stąd $\forall w \in \mathbb{C}_n[\cdot]$ mamy $w(T) P_{\lambda_i} = w(T P_{\lambda_i})$

Przez ciągłość mamy $f(T) P_{\lambda_i} = f(T P_{\lambda_i}) \quad (***)$

$$(**) + (***) \Rightarrow \quad f(T) = \sum_{i=1}^{k} f(T \cdot P_{\lambda_i})$$

Policzmy $\quad f(T \circ P_{\lambda_i})$

(1) Rozwijamy f w szereg wokół λ_i: $\quad f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \cdot (z - \lambda_i)^j$

$$f(T \circ P_{\lambda_i}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \left(T \circ P_{\lambda_i} - \lambda_i \cdot P_{\lambda_i} \right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} \cdot (T - \lambda_i \mathbb{1})^j P_{\lambda_i}$$ urywa się na $j = n_i$

Skoro $\quad X_{\lambda_i} = \ker (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} \quad$ to $\quad (T - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} P_{\lambda_i} = 0$

$$f(T \circ P_{\lambda_i}) = \sum_{j=0}^{n_i - 1} a_{i,j} (T - \lambda_i \mathbb{1})^j P_{\lambda_i}$$

$$f(T) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n_i - 1} a_{i,j} (T - \lambda_i)^j P_{\lambda_i}$$ suma skończonej liczby operatorów

Metoda 2

Niech u będzie wielomianem (np. $u(z) = z^{60}$)

Tw. Cayleya - Hamiltona

Niech $T \in L(X)$, $w_T(z)$ - wielomian charakterystyczny.

$w_T(T) = 0$

dzielenie u przez $w_T \rightsquigarrow \exists!\ v, r$ - wielomiany

t, że: $\deg r < \deg w_T$ oraz $u(z) = v(z) w(z) + r(z)$

Wówczas $u(T) = v(T) \cdot \underbrace{w_T(T)}_{=0} + r(T) = r(T)$

Co się dzieje jeśli zastąpimy u przez f-cję całkowitą f ?

STWIERDZENIE

niech f - f-cja całkowita

w - wielomian (zespolony)

wówczas $\exists!$ f-cja całkowita g oraz wielomian r

t, że $\deg r < \deg w$ oraz $f(z) = g(z) \cdot w(z) + r(z)$

dowód:

niech $z_1, \dots, z_k$ - pierwiastki w.

$w(z) = a_n (z - z_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_k)^{n_k}$

Rozwijamy f wokół z_1: $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{1,j} (z - z_1)^j =$

$= \sum_{j=0}^{n_1 - 1} a_{1,j} (z - z_1)^j + (z - z_1)^{n_1} \cdot \underbrace{\sum_{j=n_1}^{\infty} a_{1,j} (z - z_1)^{j - n_1}}_{g_1}$ (f-cja całkowita !)

Stosując powyższe rozumowanie do g_1 oraz z_2 dostajemy

$$g_1(z) = (z-z_2)^{n_2} \cdot g_2(z) + r_2(z) \qquad \deg r_2 < n_2$$

Czyli: $$f(z) = \underbrace{r_1(z) + (z-z_2)^{n_1} \cdot r_2(z)}_{\deg(\quad) < n_1 + n_2} + (z-z_1)^{n_1}(z-z_2)^{n_2} \cdot g_2(z)$$

Po k krokach dostaję, że:

$$f(z) = r(z) + \underbrace{a_n(z-z_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (z-z_k)^{n_k}}_{w(z)} \cdot \frac{1}{a_n} \cdot g(z) \quad \text{f-cja całkowita}$$

$$\deg r < n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \deg(w)$$

Wniosek:

Niech $T \in L(X)$, f - f-cja całkowita

$w_T(z)$ - wiel. char. T.

Wówczas $f(z) = g(z) w_T(z) + r(z) \qquad \deg r < \deg w$

• oraz $$f(T) = \underbrace{g(T) w_T(T)}_{= 0} + r(T) = r(T)$$

np.:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \qquad \text{policzyć } e^A$$

$$w_T(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) = \det(T - \lambda \mathbb{1})$$

$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 1$

$n_1 = 2 \qquad n_2 = 1$

$V_{\lambda_1} = \ker(T+1)^2$

$$\underset{[1_{\lambda_1}]}{(T+1)^2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_1} \quad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V_{\lambda_2} = \ker(T-1) = \ker \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Znajdujemy P_1, P_{-1} – rzuty na p-nie pierwiastkowe

$$[P_{-1}]_{st}^{st} \qquad [P_2]_{st}^{st} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{z\, V_{\lambda_2}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z\, V_{\lambda_1}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{-\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{V_{\lambda_1}} - \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{V_{\lambda_2}}$$

$$P_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

spr.

$$P_{\lambda_1} + P_{\lambda_2} = \mathbb{1}$$

$$e^T = \left(f(1)\cdot 1 + f'(1)(A - \mathbb{1}) + \frac{f''(1)}{2!}(A-\mathbb{1})^2 + \dots\right) P_{\lambda_2} +$$

$$+ \left(f(-1)\mathbb{1} + f'(-1)(A+\mathbb{1}) + \frac{f''(-1)}{2!}(A+\mathbb{1})^2 + \dots\right) P_{\lambda_1} =$$

$$= f(\mathbb{1}) P_{\lambda_{\mathbb{1}}} + f(-1)\mathbb{1} + \left(f'(-1)(A+\mathbb{1})\right) P_{\lambda_2} = e P_{\lambda_1} + e^{-1} A \cdot P_{\lambda_2}$$