Wykład 03.12.2021.

**Przypomnienie** $V$ - zespolone p-ń wekt.

$A : V \to V$ - operator liniowy

$A^+ : V \to V$ - hermitowskie sprzężenie $A$

$$\langle A^+ u | v \rangle = \langle u | A v \rangle .$$

Hermitowskie sprzężenie macierzy = transpozycja + sprzężenie zespolone

$$\begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ 2+i & 1 & i \\ 1 & i & i \end{bmatrix}^+ = \begin{bmatrix} 1 & 2-i & 1 \\ -i & 1 & -i \\ 1 & -i & -i \end{bmatrix}$$

## Formuła polaryzacyjna.

$$\langle u | A v \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \langle i^k u + v | A(i^k u + v) \rangle$$

ćwiczenie rachunkowe.

Operator normalny: $A^+ A = A A^+$.

Samosprzężony: $A^+ = A$.

Unitarny: $A^+ A = A A^+ = \mathbb{1}$

**Przykłady:** $\{e_1, e_2\}$ - baza o.n. w $\mathbb{C}$

Przykładowo $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}$

$$|e_1\rangle\langle e_1| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}[1, -i] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{bmatrix}.$$

$$|e_2\rangle\langle e_2| = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix}[-i, 1] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{bmatrix}.$$

Operator normalny.

$$(1+i)\,|e_1\rangle\langle e_1| + (5-2i)\,|e_2\rangle\langle e_2|$$

dowolne liczby zesp.

Operator samosprzężony.

$$1|e_1\rangle\langle e_1| + 5|e_2\rangle\langle e_2|$$

dowolne liczby rzeczywiste.

Operator unitarny:

$$i|e_1\rangle\langle e_1| + 1|e_2\rangle\langle e_2|$$

liczby o module 1.

Wniosek z formuły polaryzacyjnej

Operator $A: V \to V$ jest normalny wtedy i tylko wtedy gdy $\|Av\| = \|A^\dagger v\|$ dla wszystkich $v \in V$.

Dowód wniosku:

$$A^\dagger A = AA^\dagger \iff A^\dagger A - AA^\dagger = 0$$

$$\iff \langle u | A^\dagger A - AA^\dagger | v \rangle = 0 \quad \forall u, v \in V$$

$$\iff \langle w | A^\dagger A - AA^\dagger | w \rangle = 0 \quad \forall w \in V.$$

patrz formuła polaryzacyjna -

$$\iff \langle w | A^\dagger A w \rangle = \langle w | AA^\dagger w \rangle \iff$$

$$\langle Aw | Aw \rangle = \langle A^+ w | A^+ w \rangle \quad \forall w \in V$$

$$\Leftrightarrow \quad \|Aw\|^2 = \|Aw\|^2 \quad \forall w \in V$$

$\blacksquare$

## Wniosek.

$A$ - operator normalny, $v \in V$ wektor własny $A$ o wartości własnej $\lambda$ t. zn. $Av = \lambda v$. Wówczas $v$ jest wektorem własnym $A^+$ o wartości własnej $\bar{\lambda}$.

Dowód:

$$Av = \lambda v \iff (A - \lambda \cdot I)v = 0 \iff$$

$$\|(A - \lambda \mathbb{1})v\| = 0 \iff \|(A - \lambda\mathbb{1})^+ v\| = 0$$

bo $(A - \lambda\mathbb{1})$ jest normalny

$$\iff (A^+ - \bar{\lambda}\mathbb{1})v = 0 \iff A^+ v = \bar{\lambda} v.$$

Czyli $v$ jest wektorem wł. $A^+$ o w.wł. $\bar{\lambda}$. ∎

Stwierdzenie: Jeśli $A : V \to V$ jest operatorem normalnym, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ & $v_1, v_2 \in V$ są wektorami własnymi o wartości własnej $\lambda_1, \lambda_2$ odpowied-nio, to $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$.

**Dowód** $\lambda_2 \langle v_1 | v_2 \rangle = \langle v_1 | \lambda_2 v_2 \rangle =$

$= \langle v_1 | A v_2 \rangle = \langle A^+ v_1 | v_2 \rangle = \langle \bar{\lambda}_1 v_1 | v_2 \rangle =$

$= \lambda_1 \langle v_1 | v_2 \rangle$.

Zatem $(\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \langle v_1 | v_2 \rangle = 0$ i skoro

$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ to $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$.

**Stwierdzenie.**

Jeśli $A$ jest normalny & $Av = \lambda v$

oraz $\langle w|v\rangle = 0$ to $\langle Aw|v\rangle = 0$

& $\langle A^{+}w|v\rangle = 0$

**Dowód:**

**faktycznie:** $\langle A^{+}w|v\rangle = \langle w|Av\rangle =$

$= \langle w|\lambda\cdot v\rangle = \lambda\langle w|v\rangle = 0.$

**faktycznie** $\langle Aw|v\rangle = \langle w|A^{+}v\rangle =$

$= \langle w|\bar{\lambda} v\rangle = \bar{\lambda}\langle w|v\rangle = 0.$

$\langle w|v\rangle = 0.$

**Definicja** $W \subset V$ będzie podprze-

stanowią wektorowy p-ni V.
Jeśli $A: V \to V$ jest operatorem liniowym oraz $Aw \in W$ dla wszystkich $w \in W$ to mówimy, że $W$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora $A$.

**Definicja/twierdzenie** Niech $W \subset V$. Wówczas $W^\perp = \{v \in V : \langle w|v\rangle = 0 \ \forall v \in V\}$ jest podprzestrzenią $V$. Ponadto dla

każdego $v \in V$ $\exists!\, w \in W$ & $u \in W^\perp$ t.
że $v = w + u$. Innymi słowy
$V$ jest sumą prostą $W$ & $W^\perp$: $V = W \oplus W^\perp$.

**Dowód** Jeśli $w_1, w_2 \in W^\perp$ $\wedge$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$
to $\langle v | \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v | w_1 \rangle + \lambda \langle v | w_2 \rangle$
$$= 0 \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W^\perp.$$

Czy $V = W \oplus W^\perp$?

Niech $\dim V = n$, $\dim W = m$.
Niech $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$ baza $V$

t. że $\{e_1,\dots,e_m\}$ - baza $W$.

Ortogonalizacja G.-S. daje bazę $\{f_1,\dots,f_m,f_{m+1},\dots,f_n\}$ p-ni $V$ która jest ortogonalna oraz $\{f_1,\dots,f_m\}$ jest bazą $W$ i $\{f_{m+1},\dots,f_n\}$ jest bazą $W^\perp$. Zatem

$$|v\rangle = \underbrace{|f_1\rangle\langle f_1|v\rangle+\dots+|f_m\rangle\langle f_m|v\rangle}_{w\in W} + \underbrace{|f_{m+1}\rangle\langle f_{m+1}|v\rangle+\dots+|f_n\rangle\langle f_n|v\rangle}_{u\in W^\perp}.$$

$\blacksquare$

**Stwierdzenie:**

Jeśli $v \in V$ jest wektorem własnym operatora normalnego $W = \mathbb{C} \cdot v$ to $W^{\perp}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą operatora $A$ i $A^{+}$.

**Dowód:**

$$u \in W^{\perp} \Leftrightarrow \langle u | v \rangle = 0.$$

Sprawdźmy, że $\langle Au | v \rangle = 0$:

$$\langle Au | v \rangle = \langle u | A^{+} v \rangle = \langle u | \bar{\lambda} v \rangle = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle = 0$$

Czyli $Au \in W^\perp$ jeśli $u \in V$.

Podobnie $A^\dagger u \in W^\perp$:

$$\langle A^\dagger u | v\rangle = \langle u | A v\rangle = \lambda \langle u|v\rangle = 0 \quad \blacksquare$$

**Twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych.**

Jeśli $A: V \to V$ to $V$ ma bazę ortonormalną $\{e_1, \dots, e_n\}$ złożoną z wektorów własnych $A$: $Ae_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

**Dowód.**

Zauważmy, że $A$ ma wektor własny (unormowany) $e_1$.
Dlaczego? Gdyż wielomian charakterystyczny ma pierwiastek zespolony $w_A(\lambda_1) = \det(A - \lambda_1 \mathbb{1}) = 0$.

$W = \mathbb{C}e_1$, $W^\perp$ jest niezmiennicza dla $A$ oraz $A^+$. Ponadto $W^\perp$ jest p-nią z iloczynem skalarnym.
Rozważmy operator $B = A|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$.

Operator $B$ jest normalny.

(a) $\langle B^{+}u | v \rangle = \langle u | Bv \rangle \stackrel{?}{=} \langle u | Av \rangle =$
$= \langle A^{+}u | v \rangle$

czyli $B^{+} = A^{+}|_{W^{\perp}}$.

(b) $B^{+}Bu = B^{+}Au = A^{+}Au = AA^{+}u = BB^{+}u$.
dla wszystkich $u \in W^{\perp}$.

Niech $f_2 \in W^{\perp}$ wektor własny $B$

$\{f_1, f_2\}$ - układ o.n. $\langle f_1 | f_2 \rangle = 0$.

Kontynuując procedurę nowyżej

dostajemy $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ - baza o.n. wektorów własnych operatora $A$.

$\blacksquare$