Wykład 10

Twierdzenie o lokalnej odwracalności.

Co to jest bijekcja? To takie odwzorowanie $f: X \to Y$ które jest różnowartościowe, tzn. jeśli $f(x_1) = f(x_2)$ to $x_1 = x_2$ oraz jest surjektywne, tzn. $f(X) = \{ f(x) : x \in X \} = Y$.

Przykład $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_{>0} = \{y > 0\}$ $f(x) = e^x$.

Bijekcje można odwracać, tzn istnieje $g: Y \to X$ t. że $f \circ g = id_Y \Leftrightarrow f(g(y)) = y$ oraz $g \circ f = id_X \Leftrightarrow g(f(x)) = x$. Odwzorowanie g oznaczamy f^{-1}.

Na przykład dla $f(x) = e^x$ $f^{-1}(y) = \log y$.

Rzeczywiście $\log e^x = x$, $e^{\log y} = y$.

Przypuśćmy teraz, że $O_1, O_2 \subset \mathbb{R}^k$ oraz $f: O_1 \to O_2$ jest różniczkowalną bijekcją, taką, że $g = f^{-1}$ jest różniczkowalna. Ustalmy $a \in O_1$ oraz $b = f(a) \in O_2$. Jaki jest związek między $f'(a) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ oraz $g'(b) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$?

Z twierdzenia o funkcji złożonej wiemy że $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$

mnożenie macierzy

Z drugiej strony $g \circ f = id_{O_1}$. Obliczmy pochodną odwzorowania id_{O_1}, to bardzo proste

$$id_{O_1}(a+h) = id_{O_1}(a) + h = id_{O_1}(a) + \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{bmatrix}$$

czyli $r(a,h) \equiv 0$ oraz $(id_{O_1})'(a) = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{k\times k}$

Stąd $g'(b)\cdot f'(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}_{k\times k}$ ← macierz jednostkowa $k\times k$ (2)

Czyli $g'(b)$ jest macierzą odwrotną macierzy $f'(a)$. Możemy to przepisać w postaci $g'(b) = \left(f'(a)\right)^{-1}$

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \left(f'(a)\right)^{-1}.$$

Pytanie: Rozważmy teraz odwzorowanie $f: \mathcal{O}_1 \to \mathcal{O}_2$ takie, że macierz $f'(a)$ jest odwracalna dla wszystkich $a \in \mathcal{O}_1$. Czy przy tym warunku f posiada odwzorowanie odwrotne? Czy odwrotne jest różniczkowalne?

Ogólnie, jest kłopot: rozważmy $\mathcal{O}_1 = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{O}_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ i $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Utożsamiając $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{x+iy}_{=z} \in \mathbb{C}$ widzimy, że $f(z) = e^z$. W szczególności $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$, czyli f jest surjektywne. Zauważmy, że f nie jest injektywne (różnowartościowe) bo $e^{2k\pi i} = e^0 = 1$ dla wszystkich $k \in \mathbb{Z}$.

Obliczmy pochodną f. $f'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y, & -e^x \sin y \\ e^x \sin y, & e^x \cos y \end{pmatrix}$

Wyznacznik $f'(x,y) = e^{2x}(\cos(y))^2 + e^{2x}(\sin(y))^2 = e^{2x} > 0$.

Czyli $f'(x,y)$ jest odwracalna dla wszystkich $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Okazuje się, że f jest <u>lokalnie odwracalna</u>. To znaczy dla każdego $a \in \mathcal{O}$ można znaleźć otoczenie $\mathcal{O}_a \subset \mathbb{R}^2$ punktu a (czyli zbiór otwarty zawierający a) oraz otoczenie $\mathcal{O}_b \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}]\}$ punktu $b = f(a)$ takie, że $f(\mathcal{O}_a) = \mathcal{O}_b$ i takie, że odwzorowanie $f|_{\mathcal{O}_a} : \mathcal{O}_a \to \mathcal{O}_b$ jest bijekcją a odwzorowanie $\left(f|_{\mathcal{O}_a}\right)^{-1}$ jest różniczkowalne. Wskażemy $\mathcal{O}_a$, $\mathcal{O}_b$ dla e^z.

Zauważmy, że $f|_{\mathcal{O}}$ jest bijekcją dla

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \quad y \in]0, 2\pi[\right\} \text{ oraz } f(\mathcal{O}) = \mathbb{R}^2 \setminus]0,\infty[$$

Dlaczego? Bo jeśli $u \in \mathbb{C} \setminus]0,\infty[$ jest postaci

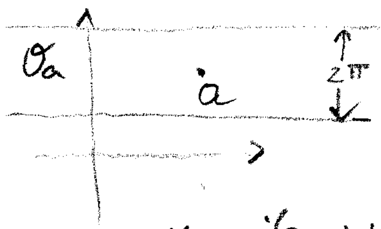
$$u = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = \left\{ \begin{matrix} r = e^x \\ e^{iy} = e^{i\varphi} \end{matrix} \right\} = r e^{i\varphi}$$

to $x = \log r = \log|u|$ oraz $y = \varphi \in]0, 2\pi[$ jest jednoznacznie wyznaczone

Czyli $g(u) = \log|u| + i \arg u$.

Ogólniej ustalmy $a = a_1 + i a_2$ i rozważmy

$$\mathcal{O}_a = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}, \; y = a_2 + \varphi \text{ gdzie } \varphi \in]-\pi, \pi[\right\}$$



Jest jasne, że $\mathcal{O}_a$ jest otoczeniem a oraz dla

$u = e^x e^{i(a_2 + \varphi)}$ mamy $x = \log|u|$ oraz $\varphi \in]-\pi, \pi[$ daje się jednoznacznie wyznaczyć.

Widać, że $(e^x \cos y, e^x \sin y)$ jest odwzorowaniem lokalnie odwracalnym. Okazuje się, że przy pewnych warunkach odwzorowanie $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}^k$ klasy C^1 (różniczkowalne i pochodna jest ciągła na $\mathcal{O}$) daje się lokalnie odwrócić wokół $a \in \mathcal{O}$. Tak jest gdy $f(a) \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$

jest macierzą odwracalną. "Można lokalnie odwrócić" to znaczy daje się wskazać $O_a \subset O$ - otoczenie punktu a oraz O_b otoczenie punktu $b = f(a)$ t. że odwzorowanie $f|_{O_a} : O_a \to O_b$ jest odwracalne oraz odwrotne odwzorowanie odwrotne $\left(f|_{O_a}\right)^{-1}$ jest klasy C^1 na O_b. Na początek udowodnimy lemat

Lemat Przypuśćmy, że $f : O \to \mathbb{R}^k$ jest klasy C^1 na O oraz macierz $f'(a) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ jest odwracalna dla pewnego $a \in O$. Wówczas istnieje otoczenie $O_a \subset O$ punktu a t. że dla $x \in O_a$ $f'(x)$ jest macierzą odwracalną

<u>Dowód</u> Zauważmy, że $\det : M_{k\times k}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą na $M_{k\times k}(\mathbb{R})$. Zatem, skoro $O \ni x \longmapsto f'(x) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ jest odwzorowaniem ciągłym to $O \ni x \longmapsto \det f'(x) \in \mathbb{R}$ jest ciągłe. Dalej dla $a \in O$ $\det f'(a) \neq 0$. Na mocy ciągłości istnieje otoczenie O_a punktu a t. że $\det f'(x) \neq 0$ dla $x \in O_a$ (bliskie macierze mają $\det(f'(x)) \neq 0$). Stąd na O_a pochodna $f'(x)$ jest macierzą odwracalną. ∎

Twierdzenie (o lokalnej odwracalności)
Przypuśćmy, że $f : \mathbb{R}^k \supset O \to \mathbb{R}^k$ jest odwzorowaniem klasy C^1 oraz $f'(a)$ jest macierzą odwracalną dla pewnego $a \in O$. Istnieje wówczas $\delta > 0$ oraz otoczenie

O_b punktu $b=f(a)$ takie, że

(1) $f\big|_{K(a,\delta)}: K(a,\delta) \longrightarrow O_b$ jest bijekcją

$K(a,\delta) = \{y: \|x-y\|_2 < \delta\}$ - kula o śr. w a i $r=\delta$

(2) Odwzorowanie odwrotne $g: O_b \longrightarrow K(a,\delta)$

$g = \left(f\big|_{K(a,\delta)}\right)^{-1}$ jest klasy C^1 na O_b oraz

jeśli $y=f(x)$ gdzie $x \in K(a,\delta)$ to

$$g'(y) = \left(f'(x)\right)^{-1}$$

Dowód (Patrz Twr 3.9 Analiza II P. Strzelecki)

(1) Bez straty ogólności możemy zał. że

$0 = a = f(a)$ oraz $f'(a) = \mathbb{1}_{k\times k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

W tym celu zamiast rozważać f bierzemy

$\tilde{f}(x) = \left[f'(a)\right]^{-1}\left(f(x+a) - f(a)\right)$. Łatwo sprawdzić, że

$\tilde{f}(0) = 0 \quad \tilde{f}'(0) = \left[f'(a)\right]^{-1} \cdot f'(a) = \mathbb{1}_{k\times k}$.

(2) Dalsze rozważania przy zał. że $a=0=f(a)$ i $f'(a)=\mathbb{1}$

Zapiszmy $f(x) = x + \varphi(x)$. Wówczas $\varphi'(0)=0$ i

$\varphi(0)=0$ oraz $f'(x) = \mathbb{1}_{k\times k} + \varphi'(x)$. Jeśli $\|\varphi'(x)\| < \frac{1}{2}$

to $f'(x) = \mathbb{1} + \varphi'(x)$ jest macierzą odwracalną

oraz $\left(f'(x)\right)^{-1} = \left(\mathbb{1} + \varphi'(x)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\varphi'(x)\right)^k (-1)^k$ ← naprzemienny znak

↖ k-ta potęga macierzy

Jest to analog wzoru

$(1+q)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k (-1)^k$ - zbieżny dla $|q| < 1$

zbieżny gdy $\|\varphi'(x)\| < \frac{1}{2}$ (<1)

(6)

Skoro $\varphi'(0)=0$ to istnieje $\delta_1>0$ t. że $\|\varphi'(x)\|<\frac{1}{2}$ dla $x\in K(0,2\delta_1)$ (bo $\|\varphi'(x)\|$ - ciągłe w x & $\|\varphi'(0)\|=0$)

czyli $f'(x)$ jest macierzą odwracalną dla $x\in K(0,2\delta_1)$

Skoro $\|\varphi(x)-\varphi(\tilde{x})\| \le \sup_{\xi\in[x,\tilde{x}]}\|\varphi'(\xi)\|\,\|x-\tilde{x}\|$ to dla

$x,\tilde{x}\in K(0,2\delta_1)$ mamy $\|\varphi(x)-\varphi(\hat{x})\| \overset{(**)}{\le} \frac{1}{2}\|x-\hat{x}\|$.

Kładąc $\hat{x}=0$ dostajemy $\|\varphi(x)\| \le \frac{1}{2}\|x\|$ $(*)$

Ponadto $\|f(x)-f(\tilde{x})\| = \|x+\varphi(x)-\hat{x}-\varphi(\hat{x})\|$

$=\|x-\hat{x}+\varphi(x)-\varphi(\tilde{x})\| \geqslant \|x-\hat{x}\|-\|\varphi(x)-\varphi(\hat{x})\| \geqslant \frac{1}{2}\|x-\hat{x}\|$

czyli jeśli $x,\tilde{x}$ j.w. oraz $f(x)=f(\hat{x})$ to

$\|x-\tilde{x}\| \le 2\|f(x)-f(\tilde{x})\|=0 \Rightarrow x=\hat{x}$ i widzimy że f jest różnowartościowo na $K(0,2\delta_1)$.

Ponadto na $f(K(0,2\delta_1))$ odwzorowanie odwrotnie $g=\left(f\Big|_{K(0,2\delta_1)}\right)^{-1}$ spełnia warunek

$$\|y-\tilde{y}\| = \|f(x)-f(\tilde{x})\| \geqslant \frac{1}{2}\|x-\tilde{x}\| =$$

$= \frac{1}{2}\|g(y)-g(\tilde{y})\|$ gdzie $y=f(x)$ $\tilde{y}=f(\hat{x})$

$\{x=g(y),\ \hat{x}=g(\hat{y})\}$. W szczególności jeśli

$y_n\to\tilde{y}$ to $\|g(y_n)-g(\tilde{y})\| \le 2\|y_n-\tilde{y}\|\to 0$

czyli g - ciągła.

Uwaga: Nie ma gwarancji, że zbiór $f(K(0,2\delta_1))$ jest otwarty. To jest główna trudność w dowodzie. Wystarczy pokazać, że $K(0,\delta_1)\subset f(K(0,2\delta_1))$. Rzeczywiście wtedy (przeciwobraz $K(0,\delta_1)$ jest otwarty) $f^{-1}(K(0,\delta_1))$ jest zbiorem otwartym: znajdziemy więc δ_2 t. że

$K(0,\delta_2) \subset f^{-1}(K(0,\delta_1))$. Wiemy już, że odwzorowanie odwrotne do f jest ciągłe na $K(0, 2\delta_1) \supset K(0,\delta_2)$

Zatem przeciwobraz $g^{-1}(K(0,\delta_2))$ jest otwartym podzbiorem $K(0,\delta_2)$ a więc skoro $g^{-1}(K(0,\delta_2)) = f(K(0,\delta_2)) \subset K(0,\delta_1)$ to $f(K(0,\delta_2))$ jest otwartym zbiorem $\mathbb{R}^2$. Czyli wracając do naszego twierdzenia widzimy, że $\delta = \delta_2$ oraz $O_b = f(K(a,\delta))$

dają tezę naszego twierdzenia.

Zatem: jak wykazać że $K(0,\delta_1) \subset f(K(0,2\delta_1))$?

Tutaj pomocnym jest twierdzenie Banacha

o odwzorowaniu zbliżającym.

Wykażemy, że istnieje ciągła funkcja $\gamma : K(0,\delta_1) \to K(0,\delta_1)$ taka, że $f(y+\gamma(y)) = y$ dla wszystkich $y \in K(0,\delta_1)$. Skoro $y + \gamma(y) \in K(0,2\delta_1)$ to widzimy, że $f(K(0,2\delta_1)) \supset K(0,\delta_1)$.

Przepiszmy warunek $f(y+\gamma(y)) = y$ w postaci

$f(x) = x + \varphi(x)$ dla $x = y + \gamma(y)$: $x + \varphi(x) = y + \gamma(y) + \varphi(y+\gamma(y))$

$$f(x) = y \Rightarrow \underset{y}{\parallel}$$

Zatem dostajemy warunek $\gamma(y) = -\varphi(y+\gamma(y))$

Ustalmy y: $\|y\| \le \delta_1$ i rozpatrzmy odwzorowanie $T_y(z) = -\varphi(y+z)$. Co możemy powiedzieć o T_z:

po pierwsze $\|T_y(z)\| = \|\varphi(y+z)\| \overset{\text{patrz }(*)}{\le} \frac{1}{2}\|y+z\| \le \delta_1$ dla z: $\|z\| \le \delta_1$. Czyli $T_y : K(0,\delta_1) \to K(0,\delta_1)$.

po drugie $\|T_y(z_1) - T_y(z_2)\| = \|\varphi(y+z_1) - \varphi(y+z_2)\| \overset{(**)}{\le} \frac{1}{2}\|y+z_1-y-z_2\| = \frac{1}{2}\|z_1-z_2\|$

Zatem T_y jest <u>zbliżające</u>

Odwzorowanie zbliżające $T_y: \overline{K(0,\delta_1)} \to \overline{K(0,\delta_1)}$ 8
ma (dokładnie jeden) punkt stały, istnieje więc $z \in \overline{K(0,\delta_1)}$ t. że $T_y(z) = z$, czyli

$z = -\varphi(y+z)$ Możemy więc położyć

$\gamma(y) = z$ i widzimy że $f(y+\gamma(y)) = y$.

Kończy to dowód części 1 twierdzenia.

$f|_{K(a,\delta)} : K(a,\delta) \to O_b$ jest bijekcją oraz

na $K(a,\delta)$ $f'(x)$ jest odwracalna

ponadto odwzorowanie $g = \left(f|_{K(a,\delta)}\right)^{-1}$

jest ciągłe. Korzystając z Lematu z WYK 9

widzimy, że g jest różniczkowalne na

O_b oraz $g'(y) = \left(f'(g(y))\right)^{-1}$. Czy g jest

klasy C^1? Zauważmy, że skoro

$y \mapsto g(y)$ jest odwzorowaniem ciągłym i

$x \mapsto f'(x)$ też to $O_b \ni y \mapsto f'(g(y)) \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$

jest odwzorowaniem ciągłym. Wystarczy pokazać, że odwracanie macierzy jest odwzorowaniem ciągłym: wynika to ze wzoru

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^D$$

$\leftarrow$ macierz dopełnień algebr.

wzór zależy w sposób ciągły od $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$