$a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\longrightarrow$ Kryterium porównawcze

$\searrow$ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ monotonicznie

Kryterium zagęszczeniowe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < \infty$$

Kryterium Cauchy'ego:

Przypuśćmy, d.d.d.n $a_n^{\frac{1}{n}} \leq r < 1$. Wówczas szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, bo gdyż $a_n \leq r^n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} r^n < \infty$.

W szczególności jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{n}} = r < 1$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. $\Big\}$ gdyż d.d.d.n $a_n \leq (r+\varepsilon)^n$ gdzie $r+\varepsilon < 1$.

Kryterium d'Alamberta (czyt. delamberte).

Przypuśćmy, że d.d.d.n $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$.

Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Rzeczywiście, niech $b_n = r^n$. Wtedy $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ i skoro $\sum b_n < \infty$ to $\sum a_n < \infty$ na mocy k-tej wersji kryterium porównawczego.

W szczególności jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$ to $\sum_{n=1} a_n < \infty$

__Przykład__. Rozważmy szereg $\sum_{p\text{-l. pierwsze}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots$

Czy ten szereg jest zbieżny?

Liczby bezkwadratowe; przykład $\boxed{2\cdot 3\cdot 5,\ 2\cdot 7\cdot 11}$ – bezkwadratowe

$\boxed{2\cdot 3^3 \cdot 5,\ 2\cdot 7^2 \cdot 11}$ – nie są bezkwadratowe

$$e^{\sum_{p\leq N} \frac{1}{p}} = \prod_{p\leq N} e^{\frac{1}{p}} = \{e^x \geq 1+x\} \geq$$

$$\prod_{p\leq N}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1+\frac{1}{p_n}\right) \geq \sum_{\substack{n\leq N \\ n\text{-bezkwadratowe}}} \frac{1}{n}$$

Przypomnienie $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2}$ gdyż $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1.$$

Zatem $2 \cdot e^{\sum_{p\leq N} \frac{1}{p}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\, e^{\sum_{p\leq N} \frac{1}{p}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{\substack{n\leq N \\ n\text{-bezkwadratowe}}}' \frac{1}{n} \geq \sum_{n\leq N}' \frac{1}{n}$.

Wniosek. $\sum_{p\leq N} \frac{1}{p} \geq \log \frac{1}{2} \sum_{n\leq N}' \frac{1}{n} \xrightarrow[N\to\infty]{} +\infty$.

i szereg $\sum_{p\text{-l. pierwsze}} \frac{1}{p} = +\infty$.

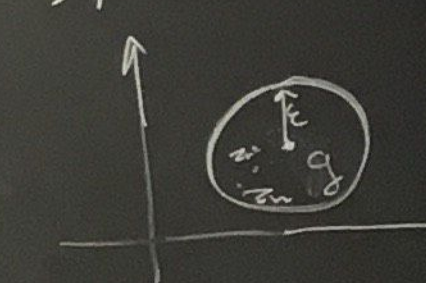
Szeregi o wyrazach zespolonych. $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – ciąg l. zespolonych $z_n = a_n + i b_n$ $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. $i^2 = -1$.

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny gdy ciąg sum częściowych $\sum_{k=1}^{n} z_k$ jest (zespolonym) ciągiem zbieżnym.

Równoważnie, gdy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne.

Definicja Mówimy, że ciąg $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ jest zbieżny do $g \in \mathbb{C}$ jeśli spełniony jest jeden z równoważnych warunków

(a) Ciągi l. rzeczywistych $(\mathrm{Re}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\mathrm{Im}\, z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ są zbieżne do $\mathrm{Re}(g)$, $\mathrm{Im}(g)$ odpowiednio.



(b) $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N : \forall_{n\geq N}\ |z_n - g| < \varepsilon$

Uwaga: Ciąg zespolony jest zbieżny jeśli spełnia war. Cauchy'ego

$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n,m\geq N}\ |z_n - z_m| < \varepsilon$

W szczególności: $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow$ spełnia war. Cauchy'ego

$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>m\geq N}\ |z_m + z_{m+1} + \ldots + z_n| < \varepsilon$

Definicja: Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ jest zbieżny.

Stwierdzenie Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.

Dowód: $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$, czyli $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_N\ \forall_{n>m\geq N}\ |z_m| + \ldots + |z_n| < \varepsilon$

W szczególności $|z_m + \ldots + z_n| \leqslant |z_m| + \ldots + |z_n| < \varepsilon$.

i $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ spełnia warunek Cauchy'ego. $\boxed{\Sigma}$

Definicja Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny ale nie jest bezwzględnie zbieżny to mówimy, że $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest warunkowo zbieżny.

Twierdzenie: Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Niech $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots \end{pmatrix}$ i rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$. Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ jest bezwzględnie zbieżny do tej samej granicy co $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Dowód $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists N: n>m\geq N\quad |z_m|+\ldots+|z_n|<\varepsilon$

Niech $m_1, m_2, \ldots, m_N \in \mathbb{N}$ t. że $\sigma(m_j)=j$

Zdefiniujmy liczbę $k(N) = N + \max\{m_1, \ldots, m_N\}$

Zauważmy, że dla $l > k(N)$ $\sigma(l) > N$. Rzeczywiście tak jest, że liczby od 1 do N są przyjmowane

Wykład 11
6.11.2019

Dowód podejście drugie

$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty \qquad \overset{\text{bijekcja}}{\sigma}: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n)\end{pmatrix}$ permutacja liczb naturalnych

$m_1 \to 1$, $m_3 \to 3$

np. 3 w danym rzędzie ma pozycję m_3

Ogólnie niech $m_j \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $\sigma(m_j)=j$. Równoważnie $m_j = \sigma^{-1}(j)$

Teza twierdzenia: $\sum |z_{\sigma(n)}| < \infty$

warunek Cauchy'ego:

dla $\varepsilon>0$ $\exists N: n>m>N$ to $|z_m|+\ldots+|z_n|<\varepsilon$. $(*)$

Szukamy $\tilde{N}: n>m>\tilde{N}$ to $|z_{\sigma(m)}|+\ldots |z_{\sigma(n)}|<\varepsilon$

Wprowadźmy notację: dla $n\in\mathbb{N}$ definiujemy $k(n)$

$k(n) = n + \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$

zauważmy, że $k(n)>n$ oraz $\forall_{j\in\{1,\ldots,n\}}$ $k(n)>m_j$

Zatem jeśli $l>k(n)$ to w szczególności $l>n$ oraz $l\neq m_j$ $j\in\{1,\ldots,n\}$. W szczególności $\sigma(l)\neq\sigma(m_j)=j$ i widać, że $\sigma(l)>n$. Niech $\tilde{N}=k(N)$ i $n>m>\tilde{N}$. W szczególności $\sigma(n)>N$ i podobnie $\sigma(m)>N$, $\sigma(m+1)>N, \ldots, \sigma(n)>N$

Korzystając z $(*)$ dostaję $|z_{\sigma(m)}|+\ldots+|z_{\sigma(n)}|<\varepsilon$

czyli $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)}$ jest bezwzględnie zbieżny

Czy $\sum_{n=1}^{\infty} z_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$?

$$\left|\sum_{j=1}^{k(N)} z_{\sigma(j)} - \sum_{j=1}^{N} z_j\right| = z_1+z_2+\ldots+z_N \leq \sum_{j=N+1}^{\infty}|z_j| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$$

pojawią się wyrazy $z_{\sigma(m_1)}$, $z_{\sigma(m_2)}$

a stąd $\sum^{\infty} z_{\sigma(j)} = \sum^{\infty} z_j$

Twierdzenie Riemann

Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ będzie takie, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest warunkowo zbieżny. Wówczas dla $\forall x\in\mathbb{R}$ istnieje $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ bijekcja taka, że $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Przykład

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ jest warunkowo zbieżny, ale nie jest bezwzgl.

jak pokazać jego zbieżność? $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\leq\frac{1}{n^2}$

sumy częściowe parzyste są szacowane przez $\sum\frac{1}{n^2}$

$\to$ szereg zbieżny

$\sum_{1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}$ ✓ Dla nieparzystych $\sum_{1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}=\sum_{1}^{2n}\frac{(-1)^k}{k}-\frac{1}{2n+1}$

Twierdzenie Abela

Rozważmy szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, gdzie $a_n, b_n \subset\mathbb{C}$

Jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1}-b_n|$ jest zbieżny oraz $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ jest ograniczony oraz $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny

Wnioski

1. kryterium **Dirichleta** - jeśli A_n są ograniczone oraz ciąg $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$ i monotonicznie zbiega do zera to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny

dowód Zał. na przykład, że $b_n\searrow 0$. Wystarczy sprawdzić, że $\sum_{n=1}^{\infty}|b_{n+1}-b_n|<\infty$: wystarczy zauważyć, że

$$\sum_{n=1}^{K}|b_{n+1}-b_n| = \sum_{n=1}^{K}(b_n-b_{n+1}) = b_1-b_{K+1} \xrightarrow{K\to\infty} b_1$$

2. kryterium **Leibniza** $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ - monotonicznie to $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ jest szeregiem zbieżnym

$(-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$, sumy częściowe $(0, -1, 0, -1, \ldots)$ ciąg ograniczony

dowód twierdzenia Abela

Niech $M>0$ $|A_n|<M$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = b_1\cdot A_1 + b_2(A_2-A_1)+\ldots+(A_n-A_{n-1})b_n$$

$$= A_1(1-b_2) + A_2(b_2-b_3)+\ldots+A_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+A_n b_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k-b_{k+1}) + A_n b_n$$

$A_n b_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, bo A_n ogr. a $b_n\to 0$

bezwzględne zbieżności $\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| \leq$

$$\leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}| < \infty$$

czyli ten szereg jest bezwzględnie zbieżny, ALE oryginalny nie musi być

Przykład

szereg $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{\log(n)}$ jest zbieżny na mocy kr. Dirichleta

$b_n = 1/\log(n)$, $a_n = e^{in\varphi}$

$$A_n = e^{i\varphi} + \dots + e^{in\varphi} = q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q}{1-q}(1-q^n) = \frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}}$$

$|A_n| < M$

$$\frac{e^{i\varphi}(1-e^{in\varphi})}{1-e^{i\varphi}} \leq \frac{2}{|1-e^{i\varphi}|} = M < \infty$$ jeśli $\varphi \neq 0$

Funkcja wykładnicza zmiennej zespolonej $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$

• pomagie $e^{i\varphi}$