$$\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad e^{i\varphi} = ? \qquad e^{x+iy} = e^z \overset{?}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

e^z można zdefiniować na 2 sposoby:

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$e^{z+w} \overset{?}{=} e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z+w)^n = e^{z+w}.$$

mnożenie szeregów

Niech $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ będą szeregami zespolonymi.

Rozważmy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ o wyrazach $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$

$= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$. Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny do $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$?

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}$$

Przykład $a_n = \frac{z^n}{n!}$, $b_n = \frac{w^n}{n!}$, $z, w \in \mathbb{C}$.

$$c_n = a_0 b_n + \ldots + a_n b_0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^{n-j}}{(n-j)!} = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \frac{1}{n!}(z+w)^n.$$

Twierdzenie (Mertens).

Jeśli szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jest bezwzględnie zbieżny to szereg $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, gdzie $c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$, jest zbieżny do $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Jeśli dodatkowo szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny to $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ też.

Dowód. $A_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$, $B_n = \sum_{j=0}^{n} b_j$, $C_n = \sum_{j=0}^{n} c_j$.

$$C_N = \sum_{0}^{N} c_j = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + \ldots + a_0 b_N + \ldots + a_N b_0 = \sum_{j=0}^{N} b_j A_{N-j}$$

$|C_N - A_\infty B_\infty| < \varepsilon$. Ustalmy ε oraz liczbę $\eta > 0$, gdzie η dobierzemy później. $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : r > n_0 \ \sum_{j=r}^{\infty} |b_j| < \eta$

Ponadto istnieje $n_1 > n_0$ taka, że $|A_\infty - A_{n_1}| < \eta$ i dla $r > n_1$ $|A_r - A_\infty| < \eta$

$$|C_N - A_\infty B_\infty| = |\underbrace{C_N - A_\infty B_{n_1}} + \underbrace{A_\infty B_{n_1} - A_\infty B_\infty}| \leq$$

$$\leq \underbrace{|C_N - A_\infty B_{n_1}|} + \underbrace{|A|_\infty \sum_{j=n_1}^{\infty} |b_j|}_{\leq |A_\infty|\,\eta}$$

$N > n_1$

$$|C_N - A_\infty B_{n_1}| = \left|\sum_{j=0}^{N} b_j A_{N-j} - \sum_{j=0}^{n_1} A_\infty b_j\right| = \left|\sum_{j=0}^{n_1}(A_{N-j} - A_\infty)\cdot b_j + \sum_{j=n_1+1}^{N} b \ldots\right.$$

$$\leq \sup_{j\in\{0,\ldots,n_1\}} |A_{N-j} - A_\infty| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| + \underbrace{\sup_{j=n_1+1,\ldots,N} |A_{N-j}| \cdot \sum_{j=n_1+1}^{\infty} |b_j|}_{M = \sup_{j\in\mathbb{N}} |A_j|} \leq M \cdot \eta$$

dla $N > 2n_1$, $N - j > n_1$.

$$\leq \eta \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| + \eta M = \tilde{M} \cdot \eta = \varepsilon \qquad \tilde{M} = M + \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \quad \text{Kładziemy } \eta = \frac{\varepsilon}{\tilde{M}}$$

Jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny to stosując

wniosek z twierdzenia Mertensa do $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ & $\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|$ widzimy, że zbieżny

jest $\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{c}_n$, $\tilde{c}_n=\sum_{j=0}^{n}|a_j||b_{n-j}| \geq |c_n| = \left|\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right|$

a więc $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest bezwzględnie zbieżny. ∎

Funkcja $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

1. Szereg e^z jest bezwzględnie zbieżny dla $z\in\mathbb{C}$.

Rzeczywiście $\left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right| < \frac{1}{2}$ jeśli $n+1 > 2|z|$

zatem $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!} < \infty$.

2. $e^{z+w}=e^z e^w$ dla $z, w\in\mathbb{C}$ - wniosek z twierdzenia Mertensa

3. $e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$ - ćwiczenia

4. $\overline{e^z}=e^{\bar{z}}$. Rzeczywiście $\overline{e^z}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{z}^n}{n!}=e^{\bar{z}}$

5. W szczególności $|e^{i\varphi}|=1$; $e^{i\varphi}\,\overline{e^{i\varphi}}=e^{i\varphi}e^{\overline{i\varphi}}=e^{i\varphi-i\varphi}=e^0=1$

6. $\lim_{h_n\to 0}\frac{e^{z+h_n}-e^z}{h_n}=e^z$.

Wystarczy pokazać, że $\lim_{h_n\to 0}\frac{e^{h_n}-1}{h_n}=1$. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\lim_{n\to\infty}h_n=0$

d.d.d n

$$\left|\frac{e^{h_n}-1}{h_n}-1\right| = \left|\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h_n^j}{j!}-1-h_n}{h_n}\right| = \left|\frac{\sum_{j=2}^{\infty}\frac{h_n^j}{j!}}{h_n}\right| \leq |h_n|\cdot\sum_{j=2}^{\infty}\frac{|h_n|^{j-2}}{j!} \leq$$

$$|h_n|\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=e|h_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Funkcje trygonometryczne definiujemy następująco:

$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\quad\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $z\in\mathbb{C}$.

Zauważmy $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ $\quad z\in\mathbb{C}$.

Szeregi potęgowe dla funkcji trygonometrycznych.

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

⑥ $\lim_{h_n\to 0}\frac{e^{z+h_n}-e^{z}}{h_n}=e^{z}$.

Wystarczy pokazać, że $\lim_{h_n\to 0}\frac{e^{h_n}-1}{h_n}=1$. $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\lim_{n\to\infty}h_n=0$ d.d.d.n

$$\left|\frac{e^{h_n}-1}{h_n}-1\right|=\left|\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{h_n^j}{j!}-1-h_n}{h_n}\right|=\left|\frac{\sum_{j=2}^{\infty}\frac{h_n^j}{j!}}{h_n}\right|\le|h_n|\cdot\sum_{j=2}^{\infty}\frac{|h_n|^{j-2}}{j!}\le$$

$$|h_n|\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}=e|h_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Funkcje trygonometryczne. definiujemy ...

$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ $\quad\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $z\in\mathbb{C}$

Zauważmy $e^{iz}=\cos z+i\sin z$ $\quad z\in\mathbb{C}$.

Szeregi potęgowe dla funkcji trygonometrycznych

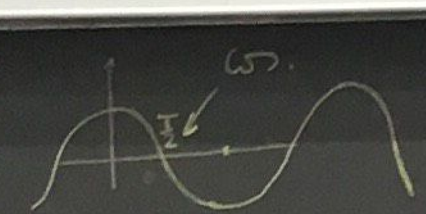
$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

Wnioski

$\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1$

$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z-1}{z}=$

Liczba π. 

$\frac{\pi}{2}$ jest najmniejszą dodatnią liczbą zerującą $\underline{\cos}$

Lemat 1.

Dla $y\in\,]0,2]$ mamy $y>\sin y>0$.

Dowód. $\sin y=y+\left(-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}\right)\left(-\frac{y^7}{7!}+\frac{y^9}{9!}\right)+(\dots)<y$.

Zauważmy, że $-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}=\frac{y^3}{3!}\left(\frac{y^2}{4\cdot 5}-1\right)\le\frac{y^3}{3!}\cdot\left(\frac{1}{5}-1\right)<0$,

podobnie $-\frac{y^7}{7!}+\frac{y^9}{9!}=\frac{y^7}{7!}\left(\frac{y^2}{8\cdot 9}-1\right)<0$. itd.

$$\sin y=\left(y-\frac{y^3}{3!}\right)+\left(\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}\right)+(\dots\dots)+\dots$$

$$y-\frac{y^3}{3!}=y\left(1-\frac{y^2}{2\cdot 3}\right)>y\left(1-\frac{4}{6}\right)>0.$$

$$\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}=\frac{y^5}{5!}\left(1-\frac{y^2}{6\cdot 7}\right)>y\left(1-\frac{4}{6\cdot 7}\right)>0.$$