WYKŁAD 12.

Przykład 1, TWIERDZENIE O FUNKCJI UWIKŁANEJ

Weźmy $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dane wzorem $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Dla $\vec{w}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$ mamy $F(\vec{w}_0) = 1$. Utożsamimy $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$: wtedy $\vec{w}_0 = (\vec{x}_0, y_0)$ gdzie $\vec{x}_0 = \vec{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y_0 = 1$.

Ogólniej wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ utożsamimy z parą $\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, y\right) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ gdzie $y = x_n$. Czy spełnione są założenia TFU dle $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, y\right) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + y^2$ w punkcie $(\vec{0}_{n-1}, 1)$?

$$F'_y\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, y\right)\Big|_{(\vec{0}_{n-1},1)} = \frac{\partial F}{\partial y}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, y\right)\Big|_{(\vec{0}_{n-1},1)} = 2y\big|_{(\vec{0}_{n-1},1)} = 2.$$

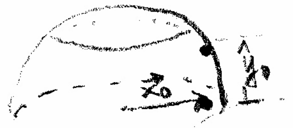
Zatem równanie $F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_{n-1} \end{bmatrix}, y\right) = 1$ można rozwikłać na pewnym otoczeniu $\vec{0}_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ i $1 \in \mathbb{R}$. Oczywiście $y = +\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$ gdzie $x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1$. Czyli otoczeniem $\vec{0}_{n-1}$ jest w tym przypadku kula $K(\vec{0}_{n-1}, 1) = \left\{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1} \quad x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 < 1\right\}$. $y_+(x) = +\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$

Podobną analizę możemy przeprowadzić dle $\vec{w}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$. Wówczas $y_-(x) = -\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$.

Ogólniej jeśli $\vec{w}_0 = \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ gdzie $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ spełniają $F(\vec{w}_0) = 1$ i $y_0 \neq 0$ to wokół $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ równanie można rozwikłać wzorem $y = \operatorname{sgn}(y_0)\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2}$

Co to znaczy "wokół"? Przedstawmy to na rysunku.

Przypuśćmy, że $y_0 > 0$ oraz $n=3$.



Tym razem otoczeniem $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ jest dysk $K(0,1) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\}$ i tak jak wcześniej $y(x) = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$

Problemy pojawią się dla $y_0 = 0$. Wtedy tracimy jednoznaczność: nie wiadomo czy wziąć y_+ czy y_-. W tej sytuacji nie jest spełnione założenie $F'_y(\vec{x}_0, y_0) \neq 0$. rzeczywiście $F'_y(\vec{x}_0, y_0) = 2y_0 = 0$

Co w tej sytuacji zrobić? Zmieniamy optykę! Weźmy dla przykładu $\vec{w}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (wracamy do ogólnego przypadku). Tym razem utożsamiamy

$$\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^{n-1} : \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left(x_1, \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right)$$

zatem x_1 będzie funkcją $x_2, \dots, x_n$ daną wzorem

$$x_1 = \sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$$

gdzie $x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1$

Podobnie, gdy $w_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ to $x_1 = -\sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_n^2}$

Możemy nasze powyższe rozważania zastosować do analizy funkcji f zdefiniowanej na otoczeniu sfery $S^{n-1} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1 \right\}$.

Sfera jest powierzchnią $n-1$ w $\mathbb{R}^n$. Teorię powierzchni będziemy w pełnej ogólności rozważali w semestrze III. Na tą chwilę będziemy się interesowali zbiorami takimi jak S^{n-1}, czyli zadanymi równaniami które się nie degenerują.

Co to znaczy? Wróćmy do $F(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

Obliczmy pochodną F

$F'(x) = 2[x_1, \dots, x_n]$ Zatem dla $x \in S^{n-1}$

Mamy $F'(x)$ jest niezerowym wierszem.

W szczególności odwzorowanie liniowe

$F'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nie zeruje się na S^{n-1}; jego rząd

jest stały równy 1.

Będą nas też interesowały powierzchnie m wy-

miarowe w $\mathbb{R}^k$ zadane niezdegenerowanym ukła-

dem $k-m$ równań. Na przykład $n-2$-wymiaro-

we powierzchnia jest zadana dwoma równa-

niami. Co oznacza niezdegenerowanie?

Definicja Niech $f: \mathbb{R}^k \supset O \to \mathbb{R}^l$, $k \geq l$ oraz f jest

różniczkowalna w $a \in O$. Mówimy, że $a \in O$ jest punktem

regularnym odwzorowania f jeśli spełniony jest

jeden z równoważnych warunków

(i) rząd $f'(a) = l$ (ii) obraz $f'(a) = \mathbb{R}^l$

Uwaga: Jkoro $f'(a) \in M_{l \times k}(\mathbb{R})$ i $l \leq k$ to

rząd $f'(a) \leq l$. Co oznacza ten warunek?

Jak sprawdzać ten warunek? Dlaczego jest on

ważny? $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_l \end{bmatrix}$, $f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(a) \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f_l}{\partial x_k}(a) \end{bmatrix}$. Rząd $f'(a) = l$

oznacza, że $f'(a)$ ma l liniowo niezależnych

kolumn. Niech to będą na przykład kolumny

$k-l+1, k-l+2, \dots, k$. Jeśli funkcja jest klasy C^1 to

równanie $f(x) = 0$ daje się (na mocy TFU) rozwi-

kłać, ten zmienne $x_{k-l+1}, \dots, x_k$ są funkcjami $x_1, \dots, x_{k-l}$

oraz $f(x_1, \dots, x_{k-l}, x_{k-l+1}(x_1, \dots, x_{k-l}), \dots, x_k(x_1, \dots, x_{k-l})) = 0$

Ogólniej: jeśli a jest punktem regularnym odwzo-

rowania f klasy C^1 to wokół a można wybrać k-l zmiennych niezależnych i l-zmiennych zależnych. Numery l-zmiennych zależnych są numerami liniowo niezależnych kolumn macierzy $f'(a) \in M_{l\times k}(\mathbb{R})$. ④

Definicja: Niech $f: \mathcal{O}_{\subset \mathbb{R}^k} \to \mathbb{R}^l$ $k \geq l$ będzie funkcją klasy C^1 na $\mathcal{O}$ i rozważmy zbiór $f^{-1}(\vec{0}_{\mathbb{R}^l}) = \{x \in \mathcal{O} : f(x) = \vec{0}\}$. Jeśli wszystkie punkty $a \in f^{-1}(0)$ są regularne ze względu na f to mówimy, że $f^{-1}(\vec{0})$ jest k-l wymiarową powierzchnią zadaną przez f.

Przykład 1 $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 - 1$.

$f^{-1}(0) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_k \end{bmatrix} \quad x_1^2 + \ldots + x_k^2 = 1 \right\}$ - sfera.

Zauważmy, że wokół każdego punktu a powierzchni zadanej przez f możemy wyróżnić współrzędne niezależne (jest ich k-l) oraz współrzędne zależne. W przykładzie 1 wokół $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ niezależne są $x_1, \ldots, x_{k-1}$ a zależną jest $x_n = x_n(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{k-1}^2}$

Przestrzeń styczna (w punkcie a) do powierzchni zadanej przez f. Mówimy, że wektor $v \in \mathbb{R}^k$ jest wektorem stycznym (w punkcie a) do powierzchni M zadanej przez f jeśli istnieje krzywa $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$

taka, że $\gamma(t)\in M$ dla $t\in\mathbb{R}$, $\gamma(0)=a$ oraz $\gamma'(t)\Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\gamma_1(0) \\ \frac{d}{dt}\gamma_k(0)\end{bmatrix} = v$. Zbiór wektorów stycznych do M w punkcie $a\in M$ oznaczamy T_aM.

Twierdzenie T_aM jest k-l wymiarową podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^k$ oraz $T_aM = \ker f'(a)$ (gdzie $M=f^{-1}(0)$).

Dowód: W każdym punkcie powierzchni $a\in M$ możemy wprowadzić współrzędne, tzn wyróżnić współrzędne niezależne i zależne. Ewentualnie przenumerowując zmienne możemy założyć że w pewnym otoczeniu a, M ma postać $\{(x_1,\dots,x_{k-l}, x_{k-l+1}(x_1,\dots,x_{k-l}),\dots,x_k(x_1,\dots,x_{k-l})) : (x_1,\dots,x_{k-l})\in\tilde{O}\}$ a $\tilde{O}\subset\mathbb{R}^{k-l}$ jest otoczeniem $(a_1,\dots,a_{k-l})$.

Zatem krzywe przechodzące przez a zawarte w M zadajemy zależnością $x_1=x_1(t),\dots,x_{k-l}=x_{k-l}(t)$ podnosząc następnie taką krzywą z $\mathbb{R}^{k-l}$ do M.

Niech $g:\tilde{O}\to\mathbb{R}^l$ będzie odwzorowaniem danym wzorem $g(x_1,\dots,x_{k-l}) = (x_{k-l+1}(x_1,\dots,x_{k-l}),\dots,x_k(x_1,\dots,x_{k-l}))$

Zauważmy, że wektor $v=\begin{bmatrix}v_1\\ v_{k-l}\\ v_{k-l+1}\\ v_k\end{bmatrix}$ jest elementem T_aM gdy jest postaci

$$v=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_{k-l}(t)\\ g(x_1(t),\dots,x_{k-l}(t))\end{bmatrix}(0).$$

Oznaczmy krzywą $\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_{k-l}(t)\end{bmatrix}=\varsigma(t)\in\mathbb{R}^{k-l}$.

Wtedy $v \in T_a M$ oznacza, że

$$v = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\rho(0) \\ g'(\tilde{a})\frac{d}{dt}\rho(0) \end{bmatrix}$$ czyli v jest postaci.

$\boxed{\text{Uwaga } \tilde{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_{k-l} \end{bmatrix}}$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \; k-l \; 0 \\ 0 \quad 1 \\ g'(\tilde{a}) \end{bmatrix} \dot{\rho}(0)$$ gdzie $\dot{\rho}(0)$ oznacza wsdług $\frac{d}{dt}\rho(0)$.

czyli $T_a(M) \overset{(*)}{\subset} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & g'(\tilde{a}) \end{bmatrix}(\mathbb{R}^{k-l})$ innym słowy

$T_a M$ jest podzbiorem obrazu macierzy

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & g'(\tilde{a}) \end{bmatrix} \in M_{k \times k-l}(\mathbb{R})$. Na odwrót, przypuśćmy że $w \in \mathbb{R}^k$ jest postaci $\begin{bmatrix} w_0 \\ g'(\tilde{a})w_0 \end{bmatrix}$ dla pewnego $w_0 \in \mathbb{R}^{k-l}$ Rozważmy krzywą

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \tilde{a} + tw_0 \\ g(\tilde{a}+tw_0) \end{bmatrix} \in M$$ oraz $\dot{\gamma}(0) = w \in T_a(M)$

Czyli zawieranie $(*)$ można odwrócić!

Widzimy więc, że $T_a M = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & g'(\tilde{a}) \end{bmatrix}\right)$ jest $k-l$ wymiarową przestrzenią wektorową.

Z drugiej strony jeśli $\gamma(t) \in M$ to $f(\gamma(t)) = 0$ gdzie f zadaje M. Zatem

$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 = f'(a)\dot{\gamma}(0)$ i widzimy, że (7)
$\dot{\gamma}(0) \in \ker f'(a)$. Wniosek $T_a M \subset \ker f'(a)$

Zauważmy że $\dim \ker f'(a) + \dim \operatorname{Im} f'(a)$
$= \dim \mathbb{R}^k = k$ a skoro $\dim \operatorname{im} f'(a) =$
rząd $f'(a) = l$ to $\dim \ker f'(a) = k-l$

Konkluzja: Skoro $\dim T_a M = \dim \ker f'(a) = k-l$
to zawieranie $T_a M \subset \ker f'(a)$ musi być równo-
ścią, co kończy dowód. ■ Uwaga dalej
f oznaczane będzie symbolem G!!!

Definicja Niech M będzie k-l wymiarową
powierzchnią zadaną przez $G: \underset{\mathbb{R}^k}{\underset{\cap}{O}} \to \mathbb{R}^l$
oraz niech $f: O \to \mathbb{R}$. Mówimy, że obcięcie
$f|_M$ ma w $a \in M$ minimum lokalne jeśli
istnieje $\varepsilon > 0$ t. że $\forall x \in K(a,\varepsilon) \cap M \ f(x) \geq f(a)$.

Stwierdzenie: Jeśli f jak wyżej jest klasy C^1
to istnieje $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ takie że
$f'(a) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)\, G'(a)$.

Dowód: Niech $v \in T_a M$ będzie takie, że $v = \dot{\gamma}(0)$.
Wówczas $f(\gamma(t)) \overset{=0}{}$ jest funkcją zmiennej wstp.
parametru t $\Rightarrow \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = 0 \Rightarrow f'(a)\dot{\gamma}(0) = 0$.
A więc $T_a M \subset \ker f'(a)$

Rozważmy odwzorowanie liniowe

$T: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{l+1}$ dane wzorem

$T(v) = \begin{bmatrix} G'(a)v \\ f'(a)v \end{bmatrix}$ Innymi słowy T jest

dane macierzą $\begin{bmatrix} G'(a) \\ f'(a) \end{bmatrix} \in M_{l+1 \times k}(\mathbb{R})$.

Własności: $\ker T = \ker G$ i widzimy, że

$\dim \ker T = \dim \ker G = \dim T_a M = k-l$.

czyli $\dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = \dim \mathbb{R}^k = k$

$k-l + \dim \operatorname{im} T = k \Rightarrow \dim \operatorname{im} T = \operatorname{rk} T = l$

czyli $\begin{bmatrix} G'(a) \\ f'(a) \end{bmatrix}$ ma l liniowo niezależnych

wierszy i nie ma $l+1$ l. niezależnych wierszy.

A zatem ostatni wiersz $f'(a)$ jest l. zależny

od poprzednich i istnieją mnożniki

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ t. że $f'(a) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)\, G'(a)$ ■