Funkcje trygonometryczne

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Tożsamości:

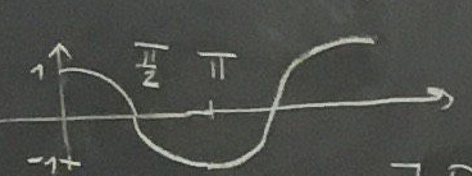
$|\cos(x)| \leq 1$

dla $x \in \mathbb{R}$ $|\sin(x)| \leq 1$.

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \qquad z \in \mathbb{C}.$$

$$\cos(z) - \cos(w) = -2 \sin\left(\frac{z-w}{2}\right) \sin\left(\frac{z+w}{2}\right)$$

Liczba π



Przypomnienie: dla $y \in]0,2]$ $y > \sin y > 0$.

Lemat Na odcinku $[0,2]$ funkcja cosinus jest malejąca to znaczy $2 \geq x_2 > x_1 \geq 0$ to $\cos(x_2) < \cos(x_1)$.

Ponadto $|\cos(x_2) - \cos(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$ dla wszystkich $x_1, x_2 \in [0,2$

Dowód $\cos(x_2) - \cos(x_1) = -2 \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)$ i skoro

$\frac{x_2 - x_1}{2}, \frac{x_2 + x_1}{2} \in]0,2]$ to lewa strona jest ściśle ujemna

Zatem $|\cos(x_2) - \cos(x_1)| = 2 \sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right) \leq 2 \cdot \frac{x_2 - x_1}{2} = |x_2 - x_1|$. dla $x_2 \geq x_1$

Twierdzenie: Dla każdej liczby $x \in [0,1[$ $\cos x > 0$, a dla każdej liczby $x \in]\frac{40}{23}, 2]$ $\cos(x) < 0$.

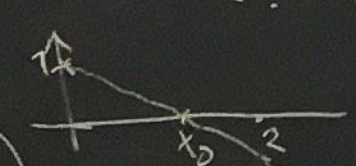
Wniosek. W przedziale $]0,2]$ istnieje dokładnie jedna x_0 taka, że $\cos(x_0) = 0$.

Liczbę $2 \cdot x_0$ oznaczamy symbolem π.

Dowód Funkcja $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

(tzn. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ to $\cos(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos(x)$) $\cos(0) = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right)\Big|_{z=0} = 1 > 0$

w $\cos(2) < 0$. Oraz jest ściśle malejąca.



Z własności Darboux (patrz kolejne wykłady) istnieje $x_0 \in]0,2[$ $\cos(x_0) = 0$. Z ścisłej monotoniczności funkcji cos taki punkt jest dokładnie jeden

Dowód twierdzenia.

Dowodzimy, że $\cos y > 0$ dla $y \in [0,1[$.

$|\cos(0) - \cos(y)| \leq y < 1$ } czyli $\cos y > 0$.

$|1 - \cos y| = 1 - \cos y$

„Obliczamy" $\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} \dots \leq -1 + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^8}{8!} + \frac{2^{12}}{12!} + \dots =$

$= -1 + \frac{2^4}{4!}\left(1 + \frac{2^4}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \frac{2^8}{5 \cdot 6 \dots 12} + \dots\right) \leq -1 + \frac{16}{24}\left(1 + \left(\frac{2}{5}\right)^4 + \left(\frac{2}{5}\right)^8 + \left(\frac{2}{5}\right)^{12} + \dots\right)$

$= -1 + \frac{16}{24} \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4}$ $\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^4 < \frac{1}{24} \Rightarrow 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4 > 1 - \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{1}{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^4} < \frac{1}{1 - \frac{1}{24}}\right\}$ $\leq -1 + \frac{16}{24} \frac{24}{23} = -\frac{7}{23}$.

Niech teraz $x \in \left]\frac{40}{23}, 2\right]$.

$|\cos 2 - \cos(x)| \leq 2 - x \leq 2 - \frac{40}{23} = \frac{6}{23}$.

W takim razie $\cos x - \cos 2 \leq \frac{6}{23} \Rightarrow \cos x \leq \frac{6}{23} + \cos 2 \leqslant \frac{6}{23} - \frac{7}{23} = -\frac{1}{23}$

i widzimy, że $\cos(x) \leq -\frac{1}{23} < 0$ dla $x \in \left]\frac{40}{23}, 2\right]$.

Wnioski dotyczące liczby π, e, i

$-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ a więc $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ lub $\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1}$

① $e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

$e^{\frac{i\pi}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$.

Dowód

$T \in i\mathbb{R}$. Rzeczywiście skoro $e^T = 1 \Rightarrow |e^T| = 1$. Jeśli $T = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ to $|e^{a+ib}| = |e^a||e^{ib}| = e^a = 1$. Czyli $a = 0$.

$e^{ib} = 1$ gdzie $b \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $b \notin \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Wtedy $e^{i(b+2k\pi)} = 1$. Dobierając $k \in \mathbb{Z}$ znajdę $\tilde{b} = b + 2k\pi \in]0, 2\pi[$

Czyli $e^{i\tilde{b}} = 1 \Rightarrow e^{\frac{i\tilde{b}}{4}} \in \{1, -1, i, -i\}$. Z drugiej strony

$\frac{\tilde{b}}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ Korzystając z tożsamości $e^{\frac{i\tilde{b}}{4}} = \underbrace{\cos\left(\frac{\tilde{b}}{4}\right)}_{>0} + i\underbrace{\sin\left(\frac{\tilde{b}}{4}\right)}_{>0}$ $\lightning$

② $e^{i\pi} + 1 = 0$ – wzór Eulera.

$e^{\frac{2i\pi}{2}} = \left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1$

③ $e^{i2k\pi} = 1$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

$e^{2\pi i} = \left(e^{i\pi}\right)^2 = (-1)^2 = 1$.

Wniosek Funkcja wykładnicza jest $2k\pi i$ – okresowe.

$\forall_{z \in \mathbb{C}} \quad e^z = e^{z + 2k\pi i} \quad \{= e^z e^{2k\pi i} = e^z\}$

Stwierdzenie: Jeśli $T \in \mathbb{C}$ spełnia $e^{z+T} = e^z$ dla wszystkich $z \in \mathbb{C}$ to istnieje $k \in \mathbb{Z}$ t. że $T = 2k\pi i$.

Zatem $T = 2k\pi i$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$. $\blacksquare$

Wniosek 2 Liczby postaci $2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ są okresami funkcji $\sin(z)$ i $\cos(z)$. $\leftarrow$ wynika z $2k\pi i$ okresowości e^z oraz wzorów $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

Na odwrót: jeśli $\cos(z + T) = \cos(z)$ dla $z \in \mathbb{C}$ to $T = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Podobnie dla funkcji $\sin(z)$).

Skoro $\sin(z) = \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$ to $\sin(z + T) = \sin(z)$. Dalej: $e^{iz} = \cos z + i\sin z$

$\Rightarrow T$ jest okresem f-cji $e^{iz} \Rightarrow T \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Wniosek 3.

$\cos(z)=0 \iff z=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$ $\qquad \cos(z)=\sin(z-\frac{\pi}{2})$

• $\sin(z)=0 \iff z=k\pi \quad k\in\mathbb{Z}.$

DOWÓD

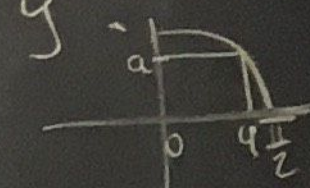
$\underset{\mathbb{R}}{(-1)^k}=(e^{i\pi})^k=e^{i\pi k}=\cos(\underset{\mathbb{R}}{\pi k})+\underset{i\mathbb{R}}{i\sin(\pi k)} \implies \sin(\pi k)=0.$

W drugą stronę: jeśli $\sin(z)=0$ to $\cos z\in\{1,-1\}$

a więc $e^{iz}=\cos z+i\sin z\in\{\pm 1\}$. $e^{2iz}=1 \implies 2iz=2k\pi i$.

$z\in\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$

Wniosek 4. Odwzorowanie $\quad \mathbb{S}^1=\{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$



$[0,2\pi[\ \ni\varphi\longmapsto e^{i\varphi}\in\mathbb{S}^1$ jest ciągłą bijekcją.

Injektywność: $e^{i\varphi_1}=e^{i\varphi_2}$ i np. $\varphi_2>\varphi_1$ $\quad e^{i(\varphi_2-\varphi_1)}=1$

a wtedy $\varphi_2-\varphi_1\in 2k\pi$ i $k=0$. prowadzi do sprzeczności.

Surjektywność: Wystarczy pokazać, że jeśli $a+ib\in\mathbb{S}^1$ $\quad a^2+b^2=1$

oraz $a,b>0$ to istnieje $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ $\quad a+ib=e^{i\varphi}$ $\quad (\cos\varphi)^2+(\sin\varphi)^2=1$

Skoro $0\leq a\leq 1$ to istnieje $\varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]$ t. że $\cos\varphi=a$. $\quad a=\cos\varphi$

$b>0,\ \sin\varphi>0$

Definicja (Heine).

Niech $A\subset\mathbb{R}$ i $f: A\to\mathbb{R}$. Mówimy, że f jest ciągła w $p\in A$ jeśli $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq A$ t. że $\lim_{n\to\infty}x_n=p$ mamy $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(p)$.

Przykłady $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x, $\log(x)$ są funkcjami ciągłymi.

Definicja (Cauchy'ego)

$f: A\to\mathbb{R}$ jest ciągła w $p\in A$ jeśli $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ t. że dla $x\in A$ spełniających $|x-p|<\delta$ mamy $|f(x)-f(p)|<\varepsilon$.

... rsan ... czyli $\sin($...

... wzorów $\cos(z)=\frac{e^{iz}+...}{2}$

$\cos(z)$ dla $z\in\mathbb{C}$ to $T=2k\pi$, k...

$\sin(z+T)=\sin(z)$. Dalej. $e^{iz}=\cos z+i\sin$...

$z \implies T\in\{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}$.