Wykład 13.

Przypomnienie: omawiamy badanie funkcji na powierzchni zadanej przez więzy. Rozważmy przykład:
niech $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ będzie dane wzorem
$G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. czyli $k=3$, $\ell=1$ oraz

$$G^{-1}(\{0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : G(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0\} =: S^2$$

Innymi słowy $G^{-1}(\{0\})$ jest sferą 2-wymiarową w $\mathbb{R}^3$. Rozważmy funkcję $f(x,y,z) = x$.
Jest jasne, że $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nie ma punktów krytycznych: $f'(x,y,z) = [1,0,0] \neq 0$.
Czy obcięcie f do S^2 ma minimum/maksimum lokalne? Jest jasne, że tak: $p_{min} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $p_{max} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$f(p_{min}) = -1$, $f(p_{max}) = +1$.

Jak w tym przypadku pracuje twr z poprzedniego wykładu?

Metoda mnożników Lagrange'a

Warunek konieczny: istnieje jeden mnożnik λ (jest tyle mnożników ile równań więzów, a u nas jest jedno równanie $x^2+y^2+z^2=1$) t. że $f'(x,y,z) = [1,0,0] = \lambda G'(x,y,z) = 2\lambda[x,y,z]$

Mamy zatem 4 równania

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 2\lambda x = 1 \Rightarrow \lambda \neq 0 \\ 2\lambda y = 0 \Rightarrow \\ 2\lambda z = 0 \Rightarrow \end{cases} \quad \Downarrow \quad y = 0 = z$$

$\to x = \pm 1$; jeśli
- $x = +1$ to $\lambda = \frac{1}{2}$
- $x = -1$ to $\lambda = -\frac{1}{2}$

I na co nam λ?

verte →

(2)

Warunek wystarczający:
jak wykazać (badając 2-gą pochodną) że w punkcie $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ mamy maksimum? $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f''(x,y,z)\Big|_{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right]} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad G''(x,y,z)\Big|_{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right]} = \begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

$$f''(p_{max}) - \lambda G''(p_{max}) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}1&&0\\&1&\\0&&1\end{bmatrix}$$ - jest

forma kwadratowa którą musimy teraz obciąć do $T_{p_{max}} S^2 = \ker G'(p_{max}) = \ker 2\cdot[1,0,0]$

$$\begin{bmatrix}v_x\\v_y\\v_z\end{bmatrix} \in T_{p_{max}} S^2 \Leftrightarrow 2v_x + 0v_y + 0v_z = 0 \Leftrightarrow v_x = 0.$$

Bazą $T_{p_{max}} S^2$ jest na przykład układ

$$\mathcal{E} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}} \right\}.$$

Obliczamy macierz $\overbrace{f''(p_{max}) - \lambda G''(p_{max})}^{\text{ozn } Q}$ obciętej do $T_{p_{max}} S^2$ w bazie $\mathcal{E}$.

$$Q(e_1,e_1) = [0,1,0]\begin{bmatrix}-1&&0\\&-1&\\0&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = -1$$

$$Q(e_1,e_2) = [0,1,0]\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 0 = Q(e_2,e_1)$$

$$Q(e_2,e_2) = \ldots\ldots = -1$$

Zatem obcięcie Q do $T_{p_{max}} S^2$ w bazie $\mathcal{E}$ ma macierz diagonalną $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ czyli ma sygnaturę $(0,2)$

Jak wynika z następnego twierdzenia w punkcie p_{max} $f|_{S^2}$ ma maks. lok.

Twierdzenie (Warunek konieczny dla ekstremum na powierzchni).

Niech M będzie powierzchnią zadaną przez $G: \mathbb{R}^k \supset O \to \mathbb{R}^l$ oraz niech $f: O \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na O.

Przypuśćmy, że dla $a \in M$ spełniony jest warunek konieczny na ekstremum tzn. istnieją liczby $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$ t. że $f'(a) - (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \cdot G'(a) = 0$. Jeśli dla każdego $0 \neq h \in T_a M$ mamy $f''(a)(h,h) - (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) G''(a)(h,h) > 0$ to w punkcie $a \in M$ funkcja $f|_M : M \to \mathbb{R}$ ma minimum lokalne.

Dowód: Na początek idea dowodu. Rozważmy funkcję 2-zmiennej $h(x,y)$ i przypuśćmy, że $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ jest punktem krytycznym. $h'(a) = [0, 0]$. Aby a było ekstremum (min) wystarczy, że $h''(a)(v,v) > 0$ dla $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Weźmy dowolną krzywą $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ t. że $v = \dot{\gamma}(0)$ i $\gamma(0) = a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (np $\gamma(t) = t \cdot v$)

Rozważmy funkcję $h \circ \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obliczmy jej pochodne w $a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$(h \circ \gamma)'(t) = h'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$ i dla $t = 0 \rightsquigarrow (h \circ \gamma)'(0) = 0$

$(h \circ \gamma)''(t) = \left(h'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\right)' = h''(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) + h'(\gamma(t)) \cdot \gamma''(t)$

i dla $t = 0$ $(h \circ \gamma)''(0) = h''(0)(v,v) > 0$

Zatem $h''(a)(v,v)>0 \Leftrightarrow$ dla każdej krzywej (4)
$\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ funkcja $h(\gamma(t))$ ma 2-gą poch dodatnią w $t=0$.

Wróćmy do naszej sytuacji w której badamy funkcję f na powierzchni M w punkcie krytycznym a. Mamy więc

$$G(a)=0\ ,\quad f'(a)-(\lambda_1,\dots,\lambda_e)\circ G'(a)=0$$

Tym razem aby zagwarantować, że funkcja f na $M=\{p\in\Theta : G(p)=0\}$ ma maksimum lokalne wystarczy sprawdzić, że dla każdej krzywej $\gamma:\mathbb{R}\to M$ t. że $\gamma(0)=a$, funkcja $f(\gamma(t))$ ma 2-gą pochodną dodatnią. Zobaczmy, że tak jest jeśli $f''(a)(v,v)-(\lambda_1,\dots,\lambda_e)\cdot G(a)(v,v)>0$ dla $0\neq v\in T_aM$. Mamy dwa opisy T_aM:

- podstawowy v są prędkościami jakie można uzyskać poruszając się po M, na przykład $\gamma'(0)\in T_aM$
- wiemy, że $T_aM=\ker G'(a)$.

My skorzystamy z pierwszego z tych opisów. Przejdźmy do obliczenia $(f\circ\gamma)''(t)$.

$(f\circ\gamma)'(t)=f'(\gamma(t))\gamma'(t)$, $(f\circ\gamma)''(t)\overset{(*)}{=}f''(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))+$
$+f'(\gamma(t))\gamma''(t)$ - obliczmy 2-gi składnik dla $t=0$

W tym celu zauważmy, że $G(\gamma(t))=0$ to $\gamma(t)\in M$. A stąd

$$G'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)=0 \quad \text{oraz}$$

$$G''(\gamma(t))(\gamma'(t),\gamma'(t))+G'(\gamma(t))\gamma''(t)=0 \quad \text{czyli}$$

$$G'(\gamma(0))\gamma''(0)+G''(\gamma(0))(\gamma'(0),\gamma'(0))=0$$

Mnożąc obie strony przez $(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$ mamy

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_l)\,G'(a)\,\gamma''(0)=-(\lambda_1,\dots,\lambda_l)\,G''(a)(\gamma'(0),\gamma'(0))$$

|| war. konieczny

$f'(a)\gamma''(0)$. Czyli dla $t=0$, równość (*) przyjmuje postać. { kładziemy $\gamma'(0)=v$ }

$$(f\circ\gamma)''(0)=f''(a)(v,v)+f'(a)\gamma''(0)=$$

$$=\underbrace{f''(a)(v,v)-(\lambda_1,\dots,\lambda_l)\,G''(a)(v,v)}$$

ta wielkość zgodnie z naszymi założeniami jest dodatnia

zatem $(f\circ\gamma)''(0)>0$ i funkcja $f|_M : M\to\mathbb{R}$ ma w $a\in M$ minimum lokalne. ∎

Uzupełnienie:

Badanie funkcji zadanej w sposób uwikłany.

Niech $f: O \to \mathbb{R}$, $O \subset \mathbb{R}^{k-1}$ będzie funkcją zadaną w sposób uwikłany przez funkcję $F: \tilde{O} \to \mathbb{R}$ $\tilde{O} \subset \mathbb{R}^k$. Bez straty ogólności możemy założyć że $F(x_1, \dots, x_{k-1}, f(x_1, \dots, x_{k-1})) = 0$. Pochodną funkcji liczymy zgodnie z regułą łańcuchową

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \quad \text{czyli} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_k}} = 0$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k) = 0 \quad j = 1, \dots, k-1 \quad \& \quad F(x_1, \dots, x_k) = 0.$$

Przypuśćmy, że rozwiązaliśmy już $(**)$ to znaczy mamy punkt $\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix}$ t. że $\frac{\partial F}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_k) = 0$ $j = 1, \dots, k-1$ oraz $F(a_1, \dots, a_k) = 0$. Jak sprawdzić warunek wystarczający dla f? II-gą pochodną "łatwo" obliczyć ze wzoru $\frac{\partial f}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial x_k}}$ który w punkcie a dla którego $\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0$ daje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_{\tilde{j}}}(a) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{\tilde{j}}}(a)}{\frac{\partial F}{\partial x_k}(a)}.$$