Równania różniczkowe

1 Przykłady

(a) Rozważmy funkcję $x : \mathbb{R} \ni t \longmapsto e^t \in \mathbb{R}$. Czyli $x(t) = e^t$. Pochodną po czasie oznaczamy $\dot{x}(t)$.

Zatem $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt} e^t = e^t = x(t)$

Czyli x spełnia równanie różniczkowe zwyczajne $\dot{x}(t) = x(t)$. Zauważmy, że funkcja $y(t) = 2 \cdot x(t) = 2e^t$ spełnia to samo równanie różniczkowe $\dot{y}(t) = y(t)$. Czyli równanie różniczkowe $\dot{x}(t) = x(t)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań. Pytanie: czy istnieją inne funkcje spełniające równanie różniczkowe $\dot{x}(t) = x(t)$?

Zauważmy też, że spośród rozwiązań postaci $\{C \cdot e^t,\ C \in \mathbb{R}\}$ mamy dokładnie jedno rozwiązanie spełniające warunek początkowy $x(0) = 1$ i jest nim funkcja $x(t) = e^t$.

(b) Rozważmy funkcję $x(t) = \frac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Równanie spełnione przez $x(t)$:

$\dot{x}(t) = -\frac{1}{t^2} = -x(t)^2$. Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem $F(x) = -x^2$. Widzimy, że x spełnia równanie różniczkowe

$$\dot{x}(t) = F(x(t)).$$

(c) $x(t) = e^{t^2}$ $\quad \dot{x}(t) = 2t\,e^{t^2} = F(t, x(t))$

gdzie $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dane wzorem

$$F(t, x) = 2t \cdot x.$$

(d) Nas interesować będą równania różniczkowe na funkcje o wartościach wektorowych. Rozważmy na przykład funkcję

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2t\sin(t^2) \\ 2t\cos(t^2) \end{bmatrix} = 2t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(t^2) \\ \sin(t^2) \end{bmatrix} =$$

$$= 2t \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) = F(t, x(t))$$ gdzie

$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem danym wzorem $F(t, x) = 2t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$.

(e) Nie będziemy omawiać teorii równań różniczkowych cząstkowych takich jak na przykład <u>równanie falowe</u> na funkcję dwóch zmiennych $\psi(t, x)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t}\psi - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi = 0$$

<u>Def</u> Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$. W równaniu tym x jest nieznaną

funkcję $x:]a,b[\longrightarrow O \subset \mathbb{R}^n$, natomiast F jest daną ③

funkcję $F:]a,b[\times O \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Wybierzmy $t_0 \in]a,b[$ oraz $x_0 \in O$. Parę (t_0, x_0) nazywamy danymi początkowymi. Dane początkowe wyznaczają warunek początkowy, tj. warunek, aby rozwiązanie równania $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ spełniało $x(t_0) = x_0$. Równanie różniczkowe wraz z warunkiem początkowym nazywamy zagadnieniem początkowym.

Równania różniczkowe wyższych rzędów są to równania w których występują pochodne rzędu 1, 2 i wyższe funkcji x. Np: $\ddot{x}(t) + \alpha(t)\dot{x}(t) + \beta(t)x(t) = \gamma(t)$ (*)

Równanie to można zamienić na układ równań rzędu 1. Niech $y(t) = \dot{x}(t)$. Wówczas (*) można zapisać jako $\dot{y}(t) = \gamma(t) - \alpha(t)y(t) - \beta(t)x(t)$.

Dostajemy zatem równanie różniczkowe 1-go rzędu na wielkość wektorową $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\beta(t), & -\alpha(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma(t) \end{bmatrix}.$$

Każde równanie rzędu 2 można sprowadzić do (wektorowego) równania rzędu 1.

Ogólniej: każde równanie rzędu n na funkcję skalarną $x(t)$ można sprowadzić do równania rzędu 1 na funkcję wektorową $w(t) \in \mathbb{R}^n$.

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

Twierdzenie Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym, $F:]a,b[\times \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą i załóżmy, że istnieje stała $L>0$ t. że

$$\forall_{\tau \in]a,b[} \quad \forall_{u,v \in \mathcal{O}} \quad \| F(\tau,u) - F(\tau,v) \| \leq L \|u-v\|$$

Niech $(t_0, x_0) \in]a,b[\times \mathcal{O}$. Wówczas istnieje $\varepsilon>0$ t. że $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \subset]a,b[$ i jedyna funkcja różniczkowalna $x:]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to \mathcal{O}$ t. że

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) & \text{dla } t \in]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

<u>Dowód</u>: Niech $\delta, \rho > 0$ będą takie, że $[t_0-\delta, t_0+\delta] \subset]a,b[$ i $\overline{K(x_0,\rho)} \subset \mathcal{O}$ gdzie

$$\overline{K(x_0,\rho)} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x-x_0\| \leq \rho \}.$$

Dalej niech $D = \sup_{\substack{\tau \in [t_0-\delta, t_0+\delta] \\ v \in \overline{K(x_0,\rho)}}} \| F(\tau, v) \|$

Skoro $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times \overline{K(x_0,\rho)} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ jest zwartym podzbiorem a F jest ciągła to $D < \infty$.

Niech $\varepsilon>0$ będzie taką liczbą, że

$$\varepsilon \leq \delta, \quad \varepsilon < \frac{1}{L}, \quad \varepsilon < \frac{\rho}{D}.$$

Definiujemy $Z_\varepsilon = \{ \gamma \in C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n) : \begin{matrix} \|\gamma(t) - x_0\| < \rho \\ \text{dla } t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] \end{matrix} \}$

Z_ε jest podzbiorem zbioru wszystkich funkcji ciągłych na odcinku $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$

Zauważmy, że funkcja stała $t \mapsto x_0$ (5)
(którą oznaczymy x_0) jest elementem Z_ε.
Co więcej, możemy rozważyć kulę w p-ni
metrycznej $C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$ o środku
w punkcie $x_0 \in C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$ i promieniu ρ
Jaka metryka jest w $C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$?
Dla $\gamma_1, \gamma_2 \in C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$ definiujemy
$$d(\gamma_1, \gamma_2) := \sup_{\tau \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]} \|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|$$
Zauważmy
że $Z_\varepsilon \subset C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$ definiujemy
jako $\{\gamma \in C[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon] : \underline{d(\gamma, x_0) \leq \rho}\}$ jest to
więc domknięta kula $K(x_0, \rho)$ w p-ni
metrycznej $C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$.

Przypomnienie z sem II - początek:

① granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji $(f_n) \subset C([0,1], \mathbb{R})$ jest funkcją ciągłą.

② jeśli ciąg $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnym ciągiem Cauchy'ego to jest jednostajnie zbieżnym ciągiem funkcyjnym.

① i ② $\Rightarrow C([0,1], \mathbb{R})$ jest zupełną p-nią metryczną

Ogólniej $C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$ jest zupełną (6)
przestrzenią metryczną. Ponieważ kula do-
mknięta w zupełnej przestrzeni metrycznej jest
metryczną p-nią zupełną to widzimy, że
$Z_\varepsilon \subset C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$ jest metryczną
przestrzenią zupełną.

Rozważmy odwzorowanie

$$\Lambda_\varepsilon : C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathcal{O}) \to C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$$

dane wzorem

$$(*)\ (\Lambda_\varepsilon(\gamma))(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, \gamma(\tau))\,d\tau \quad \text{gdzie}$$

$\gamma \in C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathcal{O})$ oraz $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$.

Zauważmy, że formuła $(*)$ zawiera całkę $\int_{t_0}^{t} F(\tau, \gamma(t))\,d\tau \in \mathbb{R}^n$ z funkcji $F(\tau, \gamma(t)) \in \mathbb{R}^n$.
Jest to n całek z funkcji skalarnych
które ustawiamy w wektor. Dla całek
z funkcji wektorowych zachodzi nierów-
ność $(**)$ $\left\| \int_{t_0}^{t} F(\tau, \gamma(\tau))\,d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \| F(\tau, \gamma(\tau)) \|\,d\tau$.
która jest analogiem $\left| \int_{t_0}^{t} g(t)\,d\tau \right| \leq \int_{t_0}^{t} |g(\tau)|\,d\tau$
dla funkcji skalarnej g.

(**) jest łatwym wnioskiem z nierówności trójkąta dla normy pitagorejskiej
$\|a+b\| \leq \|a\|+\|b\|$ $a,b\in\mathbb{R}^n$ zastosowanej do sum Riemanna.

Obserwacja 1 Λ_ε jest odwzorowaniem zwężającym, tzn dla $\gamma_1,\gamma_2\in C([t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon],\Theta)$
i $t\in[t_0-\varepsilon,t+\varepsilon]$ mamy

$$\|\Lambda_\varepsilon(\gamma_1)(t)-\Lambda_\varepsilon(\gamma_2)(t)\| = \left\|\int_{t_0}^{t} F(\tau,\gamma_1(\tau))\,d\tau - \int_{t_0}^{t} F(\tau,\gamma_2(\tau))\,d\tau\right\|$$

$$\leq \int_{t_0}^{t}\|F(\tau,\gamma_1(\tau))-F(\tau,\gamma_2(\tau))\|\,d\tau \leq$$

$$\int_{t_0}^{t} L\|\gamma_1(\tau)-\gamma_2(\tau)\|\,d\tau \leq L\cdot\sup_{\tau\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}\|\gamma_1(\tau)-\gamma_2(\tau)\|\cdot|t-t_0|$$

$$\leq \varepsilon\cdot L\cdot\sup_{\tau\ldots}\|\gamma_1(\tau)-\gamma_2(\tau)\|$$

Co można przepisać w postaci

$$d(\Lambda_\varepsilon(\gamma_1),\Lambda_\varepsilon(\gamma_2)) \leq \varepsilon L\, d(\gamma_1,\gamma_2)$$

Przypomnijmy, że $\varepsilon L<1$.

Sprawdźmy, że $\Lambda_\varepsilon(Z_\varepsilon)\subset Z_\varepsilon$: Niech $\gamma\in Z_\varepsilon$

$$\|\Lambda_\varepsilon(\gamma)(t)-x_0\| = \left\|\int_{t_0}^{t} F(\tau,\gamma(\tau))\,d\tau\right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t}\|F(\tau,\gamma(\tau))\|\,d\tau \leq \int_{t_0}^{t}\sup_{\substack{\tau\in[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\\ x\in\overline{K(x_0,\rho)}}}\|F(\tau,x)\|\,d\tau \leq D|t-t_0| \leq$$

$$\leq \varepsilon D \leq \rho$$

a więc $\Lambda_\varepsilon(Z_\varepsilon) \subset Z_\varepsilon$.

Z zasady Banacha wynika, że istnieje jedyny element $x \in Z_\varepsilon$ taki, że

$\Lambda_\varepsilon(x) = x$, tj: $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x(\tau))\,d\tau$

dla $t \in [t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$.

Stąd wynika, że x jest funkcją różniczkowalną na $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ oraz $\dot{x}(t) = F(t, x(t))$ ~~oraz~~

$x(t_0) = x_0$.

Niech teraz $y :]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\to O$ będzie funkcją różniczkowalną spełniającą $\begin{cases} \dot{y}(t) = F(t, y(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}$

Wtedy dla dowolnego $\varepsilon' \in]0, \varepsilon[$ mamy: y jest ciągła na $[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon']$ i różniczkowalna na $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ i dla $t \in [t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon]$ $y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \dot{y}(\tau)\,d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, y(\tau))\,d\tau$.

Oznacza to, że $y|_{[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon]}$ jest punktem stałym odwzorowania

$$\Lambda_{\varepsilon'} : C([t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon'], O) \to C([t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon], \mathbb{R}^n)$$

Ale jest ono zwężające, a $x|_{[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon]}$ też jest jego punktem stałym. Stąd $y|_{[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon']} = x|_{[t_0-\varepsilon', t_0+\varepsilon']}$

cyli $y = x$ na $]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[$ (bo ε' - dowolne $< \varepsilon$.)