Ciągłość $f: A \to \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim\limits_{n\to\infty} x_n)$ } Heinego.

f jest ciągła w $x \in A$: dla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$.

Przykłady: $\exp: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sin, \cos : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, wielomiany

Definicja Cauchy'ego

$f: A\to\mathbb{R}$ jest ciągła w $x\in A$ jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists \delta>0$ t. że jeśli $|y-x|<\delta$ i $y\in A$ to $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Twierdzenie. Ciągłość w sensie Heinego jest równoważna ciągłości w sensie Cauchy'ego.

Dowód: $f: A\to\mathbb{R}$ będzie ciągła w p-cie $x\in A$ w sensie Cauchy'ego. Niech $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Dlaczego $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$?

Ustalmy $\varepsilon>0$. Istnieje $\delta>0$ t. że $|y-x|<\delta$ to $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.

Skoro $x_n\to x$ to $\exists N$ t. że $|x_n-x|<\delta$ dla $n>N$.

Ale wtedy $|f(x_n)-f(x)|<\varepsilon$, $n>N$. To oznacza, że $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Na odwrót, dowodzimy nie wprost. Przypuśćmy, że nie jest spełniony warunek z definicji Cauchy'ego.

Istnieje $\varepsilon>0$ taki, że $\forall \delta>0\ \exists y\in A$, że $|y-x|<\delta$ & $|f(x)-f(y)|>\varepsilon$.

Niech np. $\delta=\frac{1}{n}$ i wybierzmy y_n : $|y_n-x|<\frac{1}{n}$ & $|f(y_n)-f(x)|>\varepsilon$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ ale $|f(y_n)-f(x)|>\varepsilon$, czyli $f(y_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

$\boxtimes$

Proste wnioski dotyczące funkcji ciągłych.

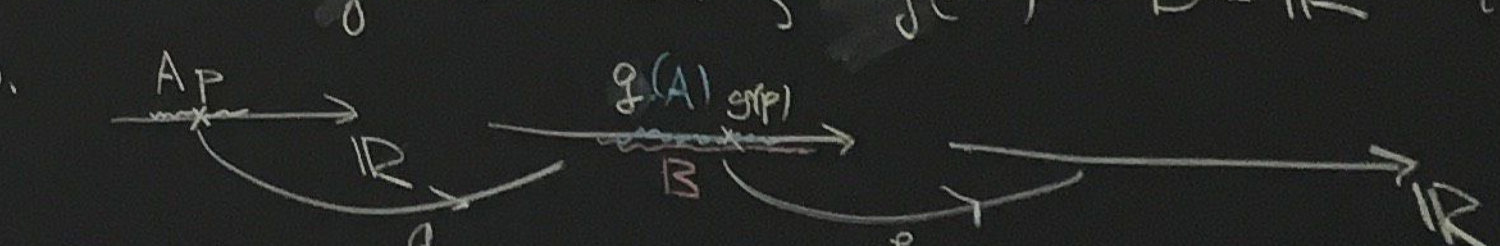
Wniosek 1: $f, g: A\to\mathbb{R}$ - f-cje ciągłe w $p\in A$.

Wówczas $f+g$, $f\cdot g$ i $\frac{f}{g}$ są ciągłe w $p\in A$.

Na przykład dla $f\cdot g$: $\lim\limits_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)\, g(x_n) = (f\cdot g)(x)$

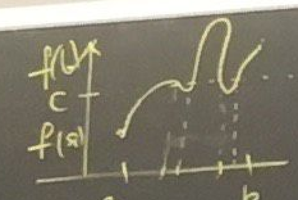
Wniosek 2. $g: A\to\mathbb{R}$, $g(A)\subset B\subset\mathbb{R}$ i $f: B\to\mathbb{R}$.

np.



Jeśli $p\in A$ i g jest ciągła w $p\in A$ oraz f jest ciągła w $g(p)$ to złożenie $f\circ g: A\to\mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą w $p\in A$.

$(f \circ g)(x_n) = f(\underbrace{g(x_n)}_{\downarrow\, g(x)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(g(x)).$



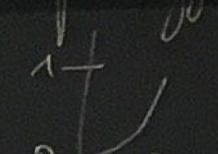
Twierdzenie (Własność Darboux).
Niech $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą na $[a,b]$
Przypuśćmy, że $f(a) < f(b)$ i $c \in \mathbb{R}$ spełnia $f(a) < c < f(b)$
Wówczas istnieje $t \in\,]a,b[$ taki, że $f(t) = c$.

Dowód: $Z = \{ s \in [a,b],$ że $f(s) \leq c\}$.
- $a \in Z$ czyli $Z \neq \emptyset$
- $Z \subset [a,b]$ – ograniczony

Niech $t = \sup Z$. Czy $f(t) = c$? Zauważmy, że $f(t) \leq c$.
Rzeczywiście, niech $\underset{\substack{\downarrow \\ Z}}{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} t$. Wówczas $f(s_n) \leq c$ zatem z ciągłości
$f(t) \leq c$

Przypuśćmy, że $f(t) < c$.
Niech $\varepsilon = c - f(t)$. Istnieje $\delta > 0$ $y \in\,]t-\delta, t+\delta[$ to $|f(y) - f(t)| < \varepsilon$.
Weźmy $y = t + \frac{\delta}{2} \Rightarrow f(t+\frac{\delta}{2}) - \cancel{f(t)} < c - \cancel{f(t)}$ czyli $f(t+\frac{\delta}{2}) < c$
stąd $t + \frac{\delta}{2} \in Z$ zatem $t + \frac{\delta}{2} \leq \sup Z = t$ czyli $\frac{\delta}{2} \leq 0$ ↯.
A więc $f(t) = c$.

Funkcja na odcinku $]0,1[$ nie musi przyjmować swoich kresów.
Przykład: $f:]0,1[\ni t \longmapsto t^2 \in \mathbb{R}$.



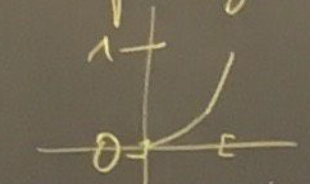
$\inf_{t\in]0,1[} f(t) = 0$. Nie istnieje $s \in\,]0,1[$, że $f(s) = \inf_{]0,1[} f(t) = 0$
Podobnie — " — " — $\bar{s} \in\,]0,1[$, że $f(\bar{s}) = \sup_{]0,1[} f(t) = 1$.

Twierdzenie (Weierstrassa) Funkcja ciągła $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje swoje kresy.

Dowód
Niech $M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie równe $\sup_{t\in[a,b]} f(t)$.
Niech $t_n \in [a,b]$ spełnia $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = M$.
Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu t_n możemy wybrać podciąg t_n' zbieżny. Niech $t = \lim_{n\to\infty} t_n'$.
Zauważmy, że $t \in [a,b]$. Z ciągłości $f(t) = \lim_{n\to\infty} f(t_n') = \lim_{n\to\infty} f(t_n) = M$
Zatem $M \in \mathbb{R}$ & $\underline{f(t) = M}$. ∎

Funkcja na odcinku $]0,1[$ nie musi „przyjmować" swoich kresów".

Przykład: $f:]0,1[\ni t \longmapsto t^2 \in \mathbb{R}$.



$\inf\limits_{t\in]0,1[} f(t) = 0$. Nie istnieje $s \in]0,1[$, że $f(s) = \inf\limits_{]0,1[} f(t) = 0$

Podobnie — " — " — $\tilde{s} \in]0,1[$, że $f(\tilde{s}) = \sup\limits_{]0,1[} f(t) = 1$.

Twierdzenie (Weierstrassa) Funkcja ciągła $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ przyjmuje swoje kresy.

<u>Dowód</u>

Niech $M \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie równe $\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$.

Niech $t_n \in [a,b]$ spełnia $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = M$.

Z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa z ciągu t_n możemy wybrać podciąg t'_n zbieżny. Niech $t = \lim\limits_{n\to\infty} t'_n$.

Zauważmy, że $t \in [a,b]$. Z ciągłości $f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t'_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(t_n)$

Zatem $M \in \mathbb{R}$ i <u>$f(t) = M$.</u> ∎

Definicja Funkcja $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ jest <u>jednostajnie</u> ciągła jeśli $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x,y\in A} : |x-y| < \delta$ to $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

zależy <u>tylko</u> od ε.

Czym jest ciągłość f na A?

$$\forall_{x\in A} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{y\in A} \ |x-y| < \delta \text{ to } |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

δ zależy od x i ε

Wniosek: funkcja jednostajnie ciągła jest ciągła na A.

Definicja: Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą L jeśli $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$.

Takie funkcje są <u>jednostajnie ciągłe</u>.

$f: A \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła jeśli

$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in A}\ |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$

Stwierdzenie Jeśli $f: A \to \mathbb{R}$ jest lipschitzowska ze stałą L, tzn $|f(x)-f(y)| \leqslant L|x-y|$, $L\in\mathbb{R}_{>0}$, to f jest jednostajnie ciągła.

Dowód: Jeśli $\varepsilon>0$ to kładąc $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$ mamy

$$|f(x)-f(y)| < L\cdot|x-y| \leqslant L\cdot\delta = \varepsilon \quad \text{dla } |x-y|<\delta. \quad \boxtimes$$

Przykład: $\exp: [-M,M] \to \mathbb{R}$. Zobaczymy, że dla $L=e^M$ $\exp$ j.w. jest funkcją lipschitzowską. Szacujemy $|\exp(x)-\exp(y)|$.

Niech $x>y$.

$$= \exp(x)\left(1-\exp(y-x)\right) \ \left\{ \begin{array}{c} e^t \geqslant 1+t \\ 1-e^t \leqslant -t \end{array} \right\} \leqslant e^M|x-y|$$

Twierdzenie Niech $f: A\to\mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne

(1) f jest jednostajnie ciągła

(2) jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$, t. że $x_n-y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow f(x_n)-f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Dowód (1)$\Rightarrow$(2) Niech $x_n-y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ustalmy $\varepsilon>0$.

Istnieje $\delta>0$: $|x-y|<\delta$ to $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Dalej, istnieje N : $n>N$ to $|x_n-y_n|<\delta$.

W szczególności, dla $n>N$ $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$

Zatem $f(x_n)-f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(1)'$\Rightarrow$(2)'. $\exists\,\varepsilon>0\ \forall\delta\ \exists\, x,y\in A\ \ |x-y|<\delta\ \&\ |f(x)-f(y)|>\varepsilon$

Dla $n\in\mathbb{N}$ weźmy $\delta=\frac{1}{n}$ oraz x_n i $y_n\in A$ $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ & $|f(x_n)-f(y_n)|>\varepsilon$

Zatem $x_n-y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ & $f(x_n)-f(y_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\boxtimes$

Przykład $f:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ gdzie $f(x)=\frac{1}{x}$.

$x_n=\frac{1}{n}$, $y_n=\frac{1}{n+1}$ $\Rightarrow$ $x_n-y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$f(x_n)-f(y_n) = n-(n+1) = -1 \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Okazuje się, że dla $\forall\varepsilon>0$ $f_\varepsilon: [\varepsilon,\infty[\to \mathbb{R}$, $f_\varepsilon(x)=\frac{1}{x}$ lipschitzowska ze stałą $L=\frac{1}{\varepsilon^2}$.

$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right| = \left|\frac{x-y}{xy}\right| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}|x-y|$$

Twierdzenie. Funkcja ciągła $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła.

Dowód: Weźmy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$.

Przypuśćmy, że $x_n - y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ale $f(x_n)-f(y_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ustalmy $\varepsilon>0$ t. że ciąg $f(x_n)-f(y_n)$ zawiera podciąg

$|f(x_n')-f(y_n')|>\varepsilon$ dla wszystkich $n\in\mathbb{N}$.

Niech x_n'' będzie podciągiem x_n' który jest zbieżny:

$x=\lim_{n\to\infty} x_n''$. Zauważmy, że $x\in[a,b]$.

Skoro $x_n''-y_n'' \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ to $y_n'' \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

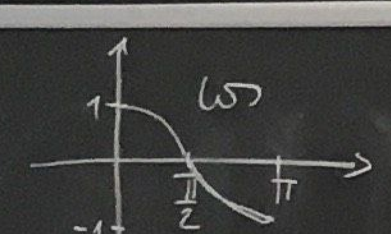
Z ciągłości funkcji f mamy $f(x_n'')-f(y_n'') \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)-f(x)=0$

co jest sprzeczne z nierównością $|f(x_n'')-f(y_n'')|>\varepsilon$ dla $n\in\mathbb{N}$ ∎

Ciągłość funkcji odwrotnej

Przykład $\cos: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest ściśle malejący na $[0,\frac{\pi}{2}]$

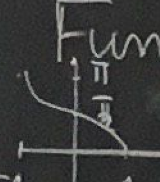
$\cos(0)=1$ & $\cos(\frac{\pi}{2})=0$. Dalej $\cos$ maleje na $[\frac{\pi}{2},\pi]$ & $\cos(\pi)=-1$



Rozważmy $\cos: [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$,

która jest odwracalna i ciągła.

Funkcja odwrotna $\arccos: [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$



jest ściśle malejąca. Czy arccos jest funkcją ciągłą?

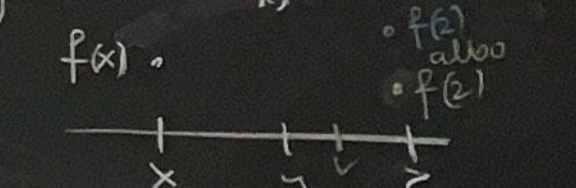
Odcinki (uogólnione) = zbiory postaci • $]a,b[$ – $a,b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$

• $[a,b[$ $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, • $]a,b]$ $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$, $b\in\mathbb{R}$;

• $[a,b]$ $a,b\in\mathbb{R}$. Zakładamy, że $a<b$.

Uwaga. Niech I – odcinek, $f: I\to\mathbb{R}$ – ciągła i różnowartościowa

wtedy f jest ściśle monotoniczna.



Przypuśćmy na przykład, że $x,y,z\in I$ $x<y<z$

$f(x)<f(y)>f(z)$

Z własności Darboux: $\exists\, x<u<y$ $f(u)=f(z)$ – sprzeczne z różnowartościowością

—— || —— || —— $\exists\, y<v<z$ $f(v)=f(x)$ —— || —— || ——

Twierdzenie $f: \underset{\text{odcinek}}{I} \to \mathbb{R}$ – ciągła różnowartościowa

Wówczas $f(I)$ jest odcinkiem, oraz $g\ f(I) \to I$

gdzie $g(f(t)) = t$ $\{g = f^{-1}\}$ jest ciągła.

Dowód: $\underset{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}{a} = \inf f(I)$, $\underset{\mathbb{R}\cup\{\infty\}}{b} = \sup(f(I))$.

Z wł. Darboux: $\forall c \in\ ]a, b[\ \ \exists t \in I\ \ c = f(t)$

Zatem $f(I)$ jest odcinkiem.

Bez straty ogólności: f ściśle rosnąca. (g – także)

Przypuśćmy, że g nie jest ciągła w $y_0 \in f(I)$.

$\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(I)$ t. że $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0$ $\quad x_n := g(y_n)\ \cancel{\xrightarrow[n\to\infty]{}}\ g(y_0) = x_0$.

Istnieje $\varepsilon > 0$ oraz podciąg x_n' ciągu x_n t. że $|x_n' - x_0| > \varepsilon$

Niech (y_n') będzie podciągiem y_n: $g(y_n') = x_n'$.

Z y_n' wybieramy podciąg y_n'' który jest monotoniczny.

(na przykład rosnący). Zauważmy, że $y_n'' \underset{n\to\infty}{\nearrow} y_0$.

oraz $x_n'' := g(y_n'')$ jest rosnący i ograniczony przez $x_0 \in I$.

Zatem $\overset{f(x_n'') = y_n''}{x_n''} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in I$.

W szczególności $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = \lim\limits_{n\to\infty} y_n'' = y_0 = f(x_0)$

Wniosek $x = x_0$.

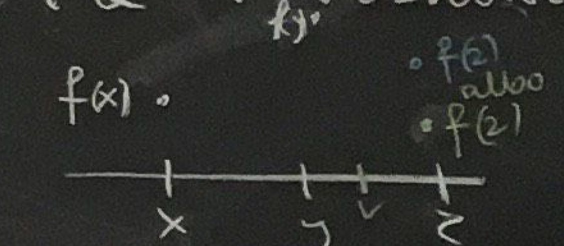
Z drugiej strony, skoro $|x_n' - x_0| > \varepsilon$ to $|x_n'' - x_0| > \varepsilon$.

co sprzeczne jest z wcz. $\lim x_n'' = x = x_0$.

Cyfli g jest ciągła. $\boxed{}$

Uwaga. Niech I – odcinek, $f: I \to \mathbb{R}$ – ciągła i różnowartościowa

wtedy f jest ściśle monotoniczna.



Przypuśćmy na przykład, że $x, y, z \in I$ $\quad x < y < z$

$f(x) < f(y) > f(z)$

Z własności Darboux: $\exists x < u < y$ $\quad f(u) = f(z)$ – sprzeczne z różnowart.

— " ——— " —— $\exists y < v < z$ $\quad f(v) = f(x)$ — — " — " ———