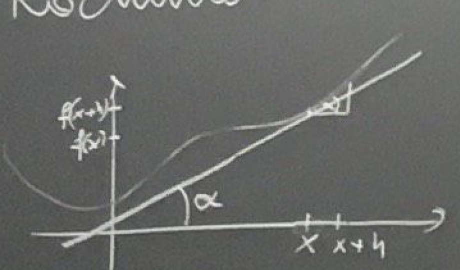
Rachunek różniczkowy, pochodna funkcji.

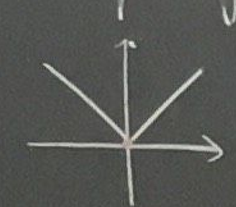



$\operatorname{tg}\alpha \approx \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ – iloraz różnicowy

im mniejsze $h$ tym lepsze przybliżenie $\operatorname{tg}\alpha$

Czy można przejść z $h$ do zera?

Nie zawsze:



$f(x)=|x|$.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)+f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Jak definiujemy $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = ?$

$f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x\in A$.

Definicja. Mówimy, że zbiór $A\subset\mathbb{R}$ jest otwarty jeśli $\forall_{x\in A}\ \exists\, \varepsilon>0 : \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A$.

Przykład $]a,b[$ – otwarty

$[a,b[$ – nie jest otwarty.

Stwierdzenie: $(A_i)_{i\in I}$ – rodzina otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$.

$\bigcup_{i\in I} A_i$ – otwarta.

Dowód: $x\in \bigcup_{i\in I} A_i \Rightarrow \exists_{i_0\in I}\ x\in A_{i_0}$ – otwarty więc $\exists_{\varepsilon>0}$

$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.

Stwierdzenie

$A, B\subset\mathbb{R}$ – otwarte $\Rightarrow A\cap B$ – otwarte.

Dowód

$x\in A\cap B \quad \exists\, \varepsilon_A, \varepsilon_B > 0 \quad ]x-\varepsilon_A, x+\varepsilon_A[ \subset A,\ ]x-\varepsilon_B, x+\varepsilon_B[ \subset B$

Weźmy $\varepsilon_{A\cap B} := \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\} \Rightarrow \ ]x-\varepsilon_{A\cap B}, x+\varepsilon_{A\cap B}[ \subset A\cap B$.

Definicja Niech $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ ($A$ – otwarty) i niech $x\in A$. i $\varepsilon>0 : \ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A$

Mówimy, że $s\in\mathbb{R}$ jest granicą ilorazu różnicowego

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ przy $h$ dążącym do zera (i piszemy $s = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$) jeśli dla każdego ciągu

$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ ]-\varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\}$ takiego, że $\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ mamy

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}.$$

Mówimy, że $f$ jest różniczkowalna w $x$, lub $f$ ma pochodną w $x$; piszemy $s = f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Stwierdzenie

Jeśli $f: \underset{\text{otw.}}{A} \to \mathbb{R}$, $x \in A$ i $f$ ma pochodną w $x$.

Wówczas $f$ jest ciągła w punkcie $x$.

Dowód $x_n \to x$; $x_n = x + h_n$ gdzie $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$f(x_n) - f(x) = f(x+h_n) - f(x) \overset{x_n \neq x}{=} \begin{cases} 0 & h_n = 0 \\ \dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \cdot h_n & h_n \neq 0 \end{cases} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0.$$

$\dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n} \xrightarrow[h\to\infty]{} f'(x)$, $h_n \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$

Zatem $f$ - ciągła w $x \in A$.

Stwierdzenie.

$f, g: A \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w $x \in A$ to

$f+g$ także oraz $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.

Dowód Niech $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset ]-\varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A$.

$$\frac{(f+g)(x+h_n) - (f+g)(x)}{h_n} = \underbrace{\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}}_{\to f'(x)} + \underbrace{\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}}_{\to g'(x)} \xrightarrow[h\to\infty]{} f'(x) + g'(x).$$

Stwierdzenie (reguła Leibniza)

$f, g: A \to \mathbb{R}$ - różniczkowalne w $x \in A$.

Wówczas $f \cdot g$ także oraz $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.

Dowód.
$$\frac{f(x+h_n)g(x+h_n) - f(x)g(x)}{h_n} = \underbrace{\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}}_{\to f'(x)} \underbrace{g(x+h_n)}_{\to g(x)} + f(x)\underbrace{\frac{g(x+h_n)-g(x)}{h_n}}_{\to g'(x)} \xrightarrow[h\to\infty]{} f'(x)g(x) + g'(x)\cdot f(x).$$

$g'(x) f(x)$

Wniosek

$(x^n)' = n x^{n-1}$.

$n=1$ - oczywiste.

Indukcja $(x^n)' = (x \cdot x^{n-1})' = x^{n-1} + x(n-1)x^{n-2} = n x^{n-1}$

Wniosek funkcje wielomianowe są różniczkowalne.

Co poza tym? $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$. $(\ln y)' \overset{?}{=} \dfrac{1}{y}$

$\sin'(x) \overset{?}{=} \cos(x)$, $\cos'(x) = -\sin(x)$

$$\lim_{h_n \to 0} \frac{e^{2+h_n} - e^2}{h_n} = e^2 \quad \text{dla } (h_n) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$\varepsilon[ \subset A$

**Definicja.** Niech $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ (otwarty np $]a,b[$) i $x \in A$. Mówimy, że $f$ ma w $x$ minimum lokalne jeśli $\exists\, \varepsilon > 0$ $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A$ oraz $\forall y \in ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ $f(y) \geq f(x)$. Podobnie definiujemy maksimum lokalne. Jeśli $f$ ma w $x$ minimum lub maksimum to mówimy, że $f$ ma w $x$ ekstremum.

Przykład $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $f(x) = |x|$. $f$ ma ekstremum (minimum) w $x = 0$. (w tym punkcie nie jest różniczkowalne)

**Lemat Fermata.**
Jeśli funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w pkcie $x \in A$ oraz ma w $x$ ekstremum to $f'(x) = 0$.

<u>Dowód</u>: Niech w $x$ $f$ ma maksimum lokalne ; $\varepsilon > 0 : ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[ \subset A$
$\forall y \in ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ $f(y) \leq f(x)$. Zauważmy, że $\forall h > 0$ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0$.
zatem $0 \geq \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Podobnie, $\forall h < 0$ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$

$$0 \leq \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x), \text{ a więc } f'(x) = 0.$$

**Definicja** $f: A \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną na $A$.
Mówimy $x \in A$ jest punktem krytycznym $f$ jeśli $f'(x) = 0$.
Przykład $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$ i $x = 0$ jest punktem krytycznym, ale $f$ nie ma w $x$ ekstremum.

**Tw. Rolle'a** Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą różniczkowalną na $]a,b[$ taką, że $f(a) = f(b)$. Wówczas istnieje $c \in ]a,b[$ takie, że $f'(c) = 0$.

<u>Dowód</u> Z tw. Weierstrassa istnieje $x, y \in [a,b]$ t. że

$$f(x) = \sup_{[a,b]} f(t) \quad \& \quad f(y) = \inf_{[a,b]} f(t)$$

Jeśli $f = \text{const}$ to mogę wybrać $x, y \in ]a,b[$.
Jeśli $f \neq \text{const}$ to $f(x) \neq f(y)$ zatem jeden z nich $\in ]a,b[$
np $x \in ]a,b[$. Z lematu Fermata $f'(x) = 0$, $c = x$.

**Tw. Cauchy'ego**; $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ ciągłe i różniczkowalne na $]a,b[$
przypuśćmy, że $g'(s) \neq 0$ dla $s \in ]a,b[$. Wówczas $\exists\, c \in ]a,b[$ t. że

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Dowód: Rozważmy funkcję pomocniczą $\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

$\varphi$ - różn na $]a,b[$ $\quad \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$.

$\varphi(a) = f(a)$, $\varphi(b) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a)$

Z tw Rolle'a $\exists\, c\in\, ]a,b[\ : \varphi'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c)$

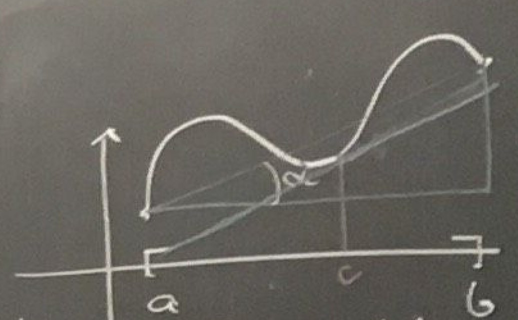
czyli mamy $(*)$. ∎

Wniosek Tw Lagrange'a.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ciągła i różniczkowalna na $]a,b[$ to istnieje $c\in\, ]a,b[$ t. że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dowód. Niech $g(x)=x$ i wstawmy $g$ do tw. Cauchy'ego:

$$f'(c) = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = tg(\alpha)$$




Wniosek $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ciągła i $f'(x)=0$ dla $x\in\, ]a,b[$ to $f(x) = \text{const}$.

Dowód Dlaczego $f(x)=f(a)$? Stosujemy tw Lagrange'a do $a$ oraz $x$ $\Rightarrow$ istnieje $c\in\, ]a,x[$, że $0 = f'(c) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $\Rightarrow$ $f(x)=f(a)$.

Monotoniczność a pierwsza pochodna.

Mówimy, że $f: ]a,b[\to\mathbb{R}$ jest rosnąca jeśli $x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y)$

ściśle rosnąca jeśli $x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

Podobnie definiujemy funkcję (ściśle) malejącą.

Uwaga: jeśli $f$ jest rosnąca na $]a,b[$ i różniczkowalna to $f'(x)\ge 0$ dla $x\in\, ]a,b[$

$f'(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0$ bo $\forall_{h>0}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \ge 0$.

W drugą stronę

Stw Jeśli $f'(x)\ge 0$ dla $x\in\, ]a,b[$ to funkcja jest rosnąca. Gdy $f'(x)>0$ to $f$ ściśle rosnąca.

Dowód. $y>x$ gdzie $x,y\in\, ]a,b[$.

Z tw Lagrange'a dla $x$ i $y$ $\Rightarrow$ $f(y) = f(x) + f'(c)(y-x)$ dla pewnego $c\in\, ]x,y[$

dowód wynika z nierówności $f'(c)(y-x)\ge 0$ które jest ostre jeśli $f'(c)>0$.

Monotoniczność a pierwsza pochodna.

Mówimy, że $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ jest rosnąca jeśli $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

ściśle rosnąca jeśli. $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Podobnie definiujemy funkcję (ściśle) malejącą.

w drugą stronę.

Stw Jeśli $f'(x) \geq 0$ dla $x \in ]a,b[$ to funkcja jest rosnąca. Gdy $f'(x) > 0$ to $f$ ściśle rosnąca.

Dowód $y > x$ gdzie $x, y \in ]a,b[$.

Wniosek Skoro $f(x) = \exp(x)$ $f'(x) = \exp(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}$

to $f$ jest ściśle rosnąca na $\mathbb{R}$.

Podobnie $\ln y$ jest ściśle rosnący na $\mathbb{R}_{>0}$.

---

Wyższe pochodne

Jeśli $f: ]a,b[ \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na $]a,b[$ oraz funkcja $f': ]a,b[ \to \mathbb{R}$ ma pochodną w $c \in ]a,b[$ to mówimy, że $f$ jest 2-krotnie różniczkowalna w $c$ i $(f')'(c) \overset{\text{ozn}}{=} f''(c)$

Podobnie definiujemy $k$-tą pochodną w $c \in ]a,b[$.

Rozważmy wielomian $W(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Zauważmy $k$-ta pochodna $W^{(k)}(0) = k!\, a_k$

W takim razie $W(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{W^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Ogólniej jeśli $y \in \mathbb{R}$ to $W(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{W^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k$.

Kartkówka: Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2} \cdot \ln(n)\right)^p$. Wsk. Dla jakich $p \in \mathbb{R}$

Wsk $\forall_{\varepsilon > 0}$ $\boxed{\frac{\log n}{n^{\varepsilon}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0}$