Twierdzenie Taylora

w - wiel. st n, $x_0 \in \mathbb{R}$ $\quad \forall_{x \in \mathbb{R}}\ w(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Twierdzenie Taylora v1 (z resztą w postaci Peano)

Niech $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ różniczkowalna do rzędu $n-1$, $x_0 \in]a,b[$ i f ma w x_0 pochodną n-tą.

Zdefiniujmy $r(x,x_0) := f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Wówczas $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x,x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Notacja $f_1, f_2 :]a,b[$, $x_0 \in]a,b[$ $\quad \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$ to piszemy $f_1(x) = o(f_2(x))$ przy $x \to x_0$.

W szczególności tw. Taylora mówimy, że $r(x,x_0) = o((x-x_0)^n)$ przy x dążącym do x_0.

Dowód Bez straty ogólności przyjmujemy, że $x_0 = 0$.

Indukcja ze względu na n.

$n=1$. $\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x} = f'(0) - f'(0) = 0$.

$n-1 \Rightarrow n$

Krok 1 Niech $\phi:]a,b[\to \mathbb{R}$ spełnia $\phi(0) = \underline{\phi'(0) = \ldots = \phi^{(n)}(0) = 0}$

Wówczas $\frac{r(x)}{x^n} = \frac{\phi(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{?} 0$

Z Tw. Lagrange'a $\frac{\phi(x)}{x} = \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x} = \phi'(c) \xlongequal[c = tx]{c \in]0,x[} \phi'(tx)$

dla pewnego $t = \frac{c}{x} \in]0,1[$

$\frac{\phi(x)}{x^n} = \frac{\phi'(tx)}{x^{n-1}} = \frac{\phi'(tx)}{(tx)^{n-1}} t^{n-1} \xrightarrow[\text{na mocy}]{x \to 0} 0$

na mocy zał. indukcyjnego zastosowanego do ϕ'.

Zauważmy, że $x \longmapsto r(x)$ spełnia te zał. które spełnia funkcja ϕ. Zatem $\frac{r(x)}{x^n} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. ∎

Przykłady

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + o(x^{2n-1})$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n)!} x^{2n} + o(x^{2n})$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + o(x^n)$

Przykład.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(\sin(x))}{\ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) - \sin(x) + \frac{(\sin(x))^3}{6} - o(\sin(x)^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x-\frac{x^3}{6}}+o(x^3) \cancel{-x+\frac{x^3}{6}}+o(x^3) + \frac{\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^3}{6} + o(x^3)}{x^3+o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{o(x^3)}{x^3}}{1+\frac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{6}$$

Wniosek z tw Taylora.

Twierdzenie (Warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna do rzędu $2n-1$ i f ma pochodną $f^{(2n)}(x_0)$ dla $x_0 \in]a,b[$

Przypuśćmy, że $f^{(1)}(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$ oraz $f^{(2n)}(x_0) \neq 0$.

Wówczas jeśli $f^{(2n)}(x_0) > 0$ to f ma w x_0 minimum lokalne.

— " — $f^{(2n)}(x_0) < 0$ — " — — " — maksimum — " —.

Uwaga. Co to znaczy, że $\lim_{x\to a} f(x) = g$? $\{a \notin$ dziedziny $f\}$

① Jeśli $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ oraz $x_n \in D(f)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, to $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$

② $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D(f)}\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon$.

① $\Leftrightarrow$ ②. Patrz rozważania dotyczące ciągłości.

Dowód twierdzenia: Z tw. Taylora $f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + r(x,x_0)$

Dla $f^{(2n)}(x_0) > 0$ | gdzie $\frac{r(x,x_0)}{(x-x_0)^{2n}} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

$\exists\delta$ t.że gdy $0<|x-x_0|<\delta$ to $\left|\frac{r(x,x_0)}{(x-x_0)^{2n}}\right| < \frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}$.

Wówczas

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} + r(x,x_0) > \frac{1}{2}\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n} \overset{|x-x_0|<\delta,\ x\neq x_0}{>} 0,$$

i w x_0 jest minimum

Twierdzenie Taylora v2.

$f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ ma na $]a,b[$ pochodną do rzędu $n+1$.

Wówczas $\forall p>0\ \forall_{x_0,x\in\mathbb{R}}\ \exists\,\theta\in]0,1[$ t.że

$$r(x,x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!\,p}(1-\theta)^{n+1-p}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

Szkic dowodu.

Dla ustalenia uwagi $x \in]x_0, x_0+h[$

Dla $y \in]x_0, x[$ rozważamy funkcję.

$$\varphi(y) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k.$$

Własności φ:

- $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r(x, x_0)$.
- φ ma 1-szą pochodną w y oraz

ćwiczenie

$$\varphi'(y) = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n.$$

W szczególności do φ mogę stosować tw Cauchy'ego:

ψ - ciągła funkcja na $[x_0, x]$ i różn. na $]x_0, x[$, $\psi'\big|_{]x_0,x[} \neq 0$

tw. Cauchy'ego

$$\exists_{c \in]x_0,x[} \text{ t. że } \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \frac{+r(x,x_0)}{-\psi(x)+\psi(x_0)} =$$

$$\exists_{\theta \in]0,1[} \quad c = x_0 + \theta(x - x_0)$$

$$r(x,x_0) = \left(\psi(x) - \psi(x_0)\right) \frac{\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}}{\psi'(x_0+\theta(x-x_0))} \cdot (x-x_0)^n \cdot (1-\theta)^n.$$

Weźmy $\psi(y) = (x-y)^p$ $\quad \psi(x) = 0$ $\quad \psi(x_0) = (x-x_0)^p.$

$$\psi'(y) = -p(x-y)^{p-1}; \quad \psi'(x_0+\theta(x-x_0)) = -1 \cdot p\left[(x-x_0)(1-\theta)\right]^{p-1};$$

$$r(x,x_0) = \frac{+\cancel{(x-x_0)^p}\, f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{+1 \cdot p\,\cancel{(x-x_0)^{p-1}}(1-\theta)^{p-1} \cdot n!}(x-x_0)^n(1-\theta)^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{p \cdot n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}$$

$\blacksquare$

dzenie Taylora v2.

$a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ ma na $]a,b[$ pochodną do rzędu $n+1$.

wtedy $\forall_{p>0} \forall_{x_0, x \in \mathbb{R}} \exists_{\theta \in]0,1[}$ t. że

$$x, x_0) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n! \cdot p}(1-\theta)^{n+1-p} \cdot (x-x_0)^{n+1}$$