Matematyka III wykład 19.11.2021

Przypomnienie: $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

W tym celu wykorzystaliśmy

Lemat Jordana $a, r > 0$ – ustalone

$f : \{\operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| > r\} \longrightarrow \mathbb{C}$ – ciągła

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$$

$$\Gamma_R = \{Re^{i\varphi} : \varphi \in [0,\pi]\}$$

Wówczas $\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

Przy okazji obliczania całki $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{(x)}\,dx$ pojawił się następujący problem:

w - holomorficzne wokół bieguna z_0 rzędu 1.

$$\Gamma_{\alpha,\beta,\varepsilon} = \{ z_0 + \varepsilon e^{i\varphi} : \alpha \le \varphi \le \beta \}$$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{\alpha,\beta,\varepsilon}} w(z)\,dz$ - obliczyć tę granicę.

Lemat

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{\alpha,\beta,\varepsilon}} w(z)\,dz = i(\beta-\alpha)\operatorname*{res}_{z_0} w(z).$$

Dowód. Skoro z_0 jest biegunem rzędu 1 to

$$(*)\begin{cases} \operatorname*{res}_{z_0} w(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, w(z) \overset{z=z_0+\varepsilon e^{i\varphi}}{=} \\ \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon e^{i\varphi}\, w(z_0+\varepsilon e^{i\varphi}) \quad \forall \varphi. \end{cases}$$

W takim razie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{\alpha,\beta,\varepsilon}} w(z)\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\alpha}^{\beta} w(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\, i\varepsilon e^{i\varphi}\, d\varphi$$

$$\int_\alpha^\beta \lim_{\varepsilon\to 0} w(z_0+\varepsilon e^{i\varphi})\, i\varepsilon e^{i\varphi}\, d\varphi \overset{(*)}{=} \operatorname*{res}_{z_0} w(z) \int_\alpha^\beta i\, d\varphi$$

$$= \operatorname*{res}_{z_0} w(z)\,(\beta-\alpha)\, i.$$

$\blacksquare$

Całki typu $\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x)\, e^{iax}\, dx$ gdzie $a>0$

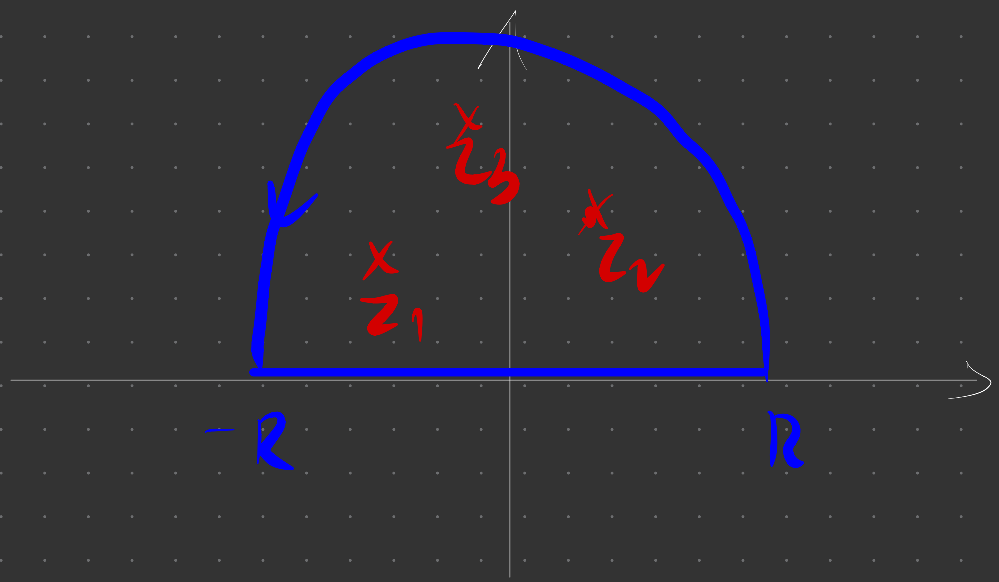
oraz Q jest funkcją wymierną t. że

1) bieguny Q są poza $\mathbb{R}$, $z_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

2) $\lim_{z\to\infty} Q(z) = 0$.

Funkcje $W(z) = Q(z)e^{iaz}$

Kontur $\Gamma_R = [-R, R] \cup \{Re^{i\varphi} : \varphi \in [0, \pi]\}$



Z lematu Jordana

$$\int_{\substack{z = Re^{i\varphi} \\ \varphi \in [0,\pi]}} Q(z)e^{iaz}\,dz \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Z twierdzenia o residuach

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) e^{iax}\, dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j > 0} \operatorname{res}_{z_j} Q(z) e^{iaz_j}$$

Przykład: Oblicz $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\, dx =: I$

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} e^{ia\cdot i} = e^{-a} 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2}$$

$$= \frac{e^{-a}\cdot 2\pi i}{2i} = \pi e^{-a}.$$

Funkcja wykładnicza e^z jest $2\pi i$ okresowa, to znaczy

$$e^z = e^{z+2\pi i} = e^{z+2k\pi i} \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Stąd funkcja $\log z$ jest określona z dokładnością do $2k\pi i$.

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

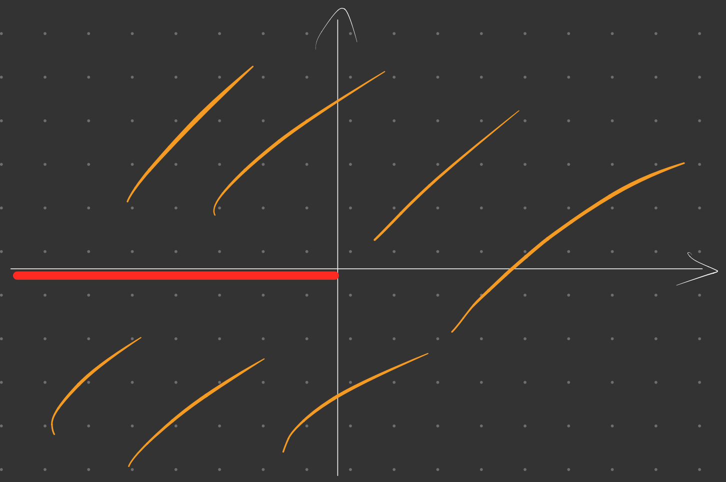
$$\arg z = \arg z + 2k\pi$$

Aby ujednoznacznić log musimy

ujednoznacznić arg z.

Na przykład dla $\arg z \in \,]-\pi, \pi[$

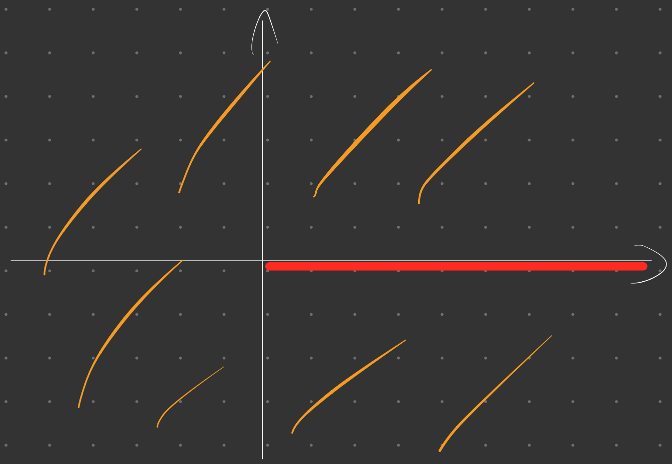
funkcja log jest określona na



$$\log(-i) = -i\frac{\pi}{2}.$$

Natomiast jeśli $\arg z \in [0, 2\pi[$ to

funkcja log jest określona na

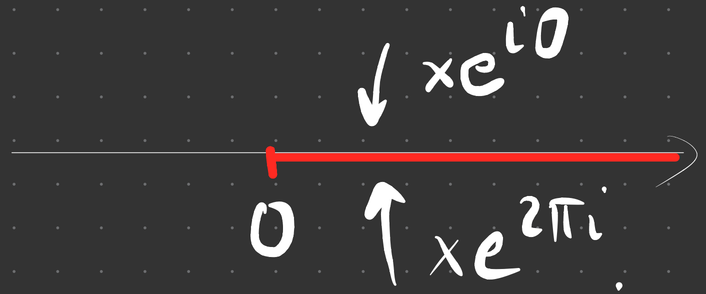
(**) 

$\log(-i) = \frac{3}{2} i \pi$

Funkcje potęgowe $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$

$z^a = e^{a \log z}$ – zależy od wyboru funkcji log. Na przykład jeśli $\log z$ zdefiniowany jak w (**) to

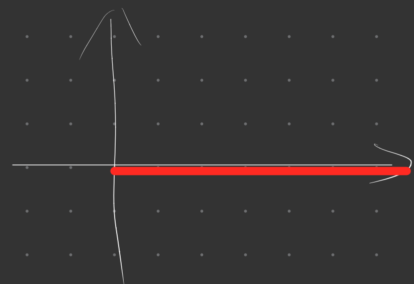
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(x+i\varepsilon)^a = x^a$$



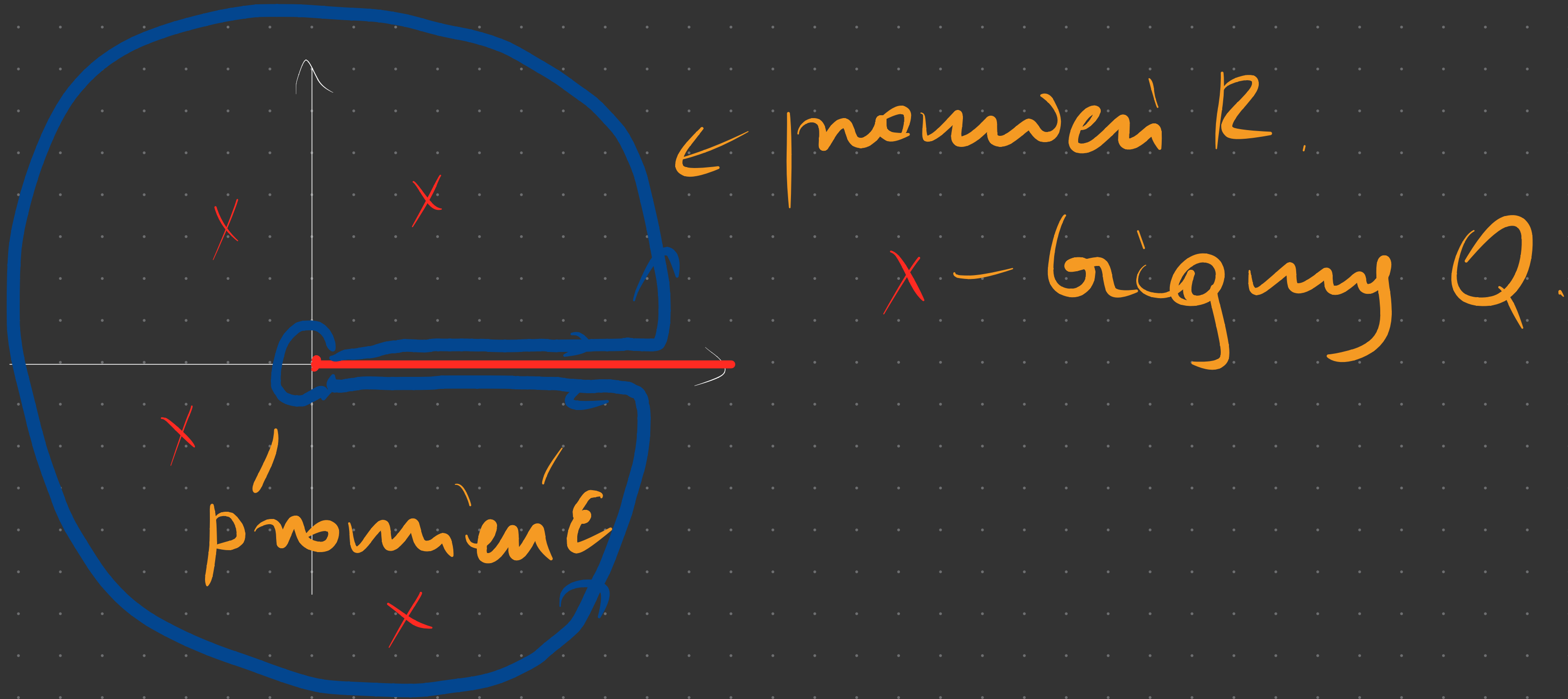
$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}(x-i\varepsilon)^a = e^{2\pi i a}\,x^a$$

Wieloznaczności funkcji z^a można wykorzystać do obliczenia pewnych całek.

Całki postaci $\int_0^\infty Q(x)\,x^{a-1}\,dx$ $\quad a>0.$

Funkcję $Q(z)z^a$ określone w 

Kontur $\Gamma_{R,\varepsilon}$ – dziurka od klucza.



Znikanie całki po małym łuku.

$z = \varepsilon e^{i\varphi}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} Q(\varepsilon e^{i\varphi})\, \varepsilon^{a-1} e^{(a-1)i\varphi}\, \varepsilon e^{i\varphi}\, i\, d\varphi$$

granica $= 0$ jeśli $z^a Q(z) \xrightarrow[z\to 0]{} 0$.

Znikanie całki po dużym łuku.

$z = Re^{i\varphi}$

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^{2\pi} Q(Re^{i\varphi}) R^a e^{(a-1)i\varphi} e^{i\varphi} i\, d\varphi = 0$$

jeśli $\lim_{z\to\infty} z^a Q(z) = 0$.

$$\int_0^\infty Q(x) x^{a-1} dx - \int_0^\infty Q(x) x^{a-1} e^{(2\pi i)a-1} dx =$$

$$2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} Q(z) \cdot z_j^{a-1}$$

Przykład Oblicz całkę $\int_0^\infty \frac{x^{\frac16}\,dx}{(x+1)(x+2)}$

$a-1=\frac16, \quad a=\frac76$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac16}\,dx}{(x+1)(x+2)} - e^{\frac{2\pi i}{6}} \cdot \int_0^\infty \frac{x^{\frac16}\,dx}{(x+1)(x+2)} = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{-1} \ldots + \operatorname*{res}_{-2} \ldots$$

$$\operatorname*{res}_{-1} \frac{z^{\frac16}}{(z+1)(z+2)} = \frac{(-1)^{\frac16}}{-1+2} = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{1}$$

biegun 1go rzędu

$$\operatorname*{res}_{-2} \frac{z^{\frac16}}{(z+1)(z+2)} = \frac{(-2)^{\frac16}}{-2+1} = \frac{2^{\frac16} e^{\frac{i\pi}{6}}}{-1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{6}}\,dx}{(x+1)(x+2)} = \frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{6}}} \cdot 2\pi i \cdot \left(1-2^{\frac{1}{6}}\right) = \frac{2^{\frac{1}{6}}-1}{\sin\frac{\pi}{6}} \pi =$$

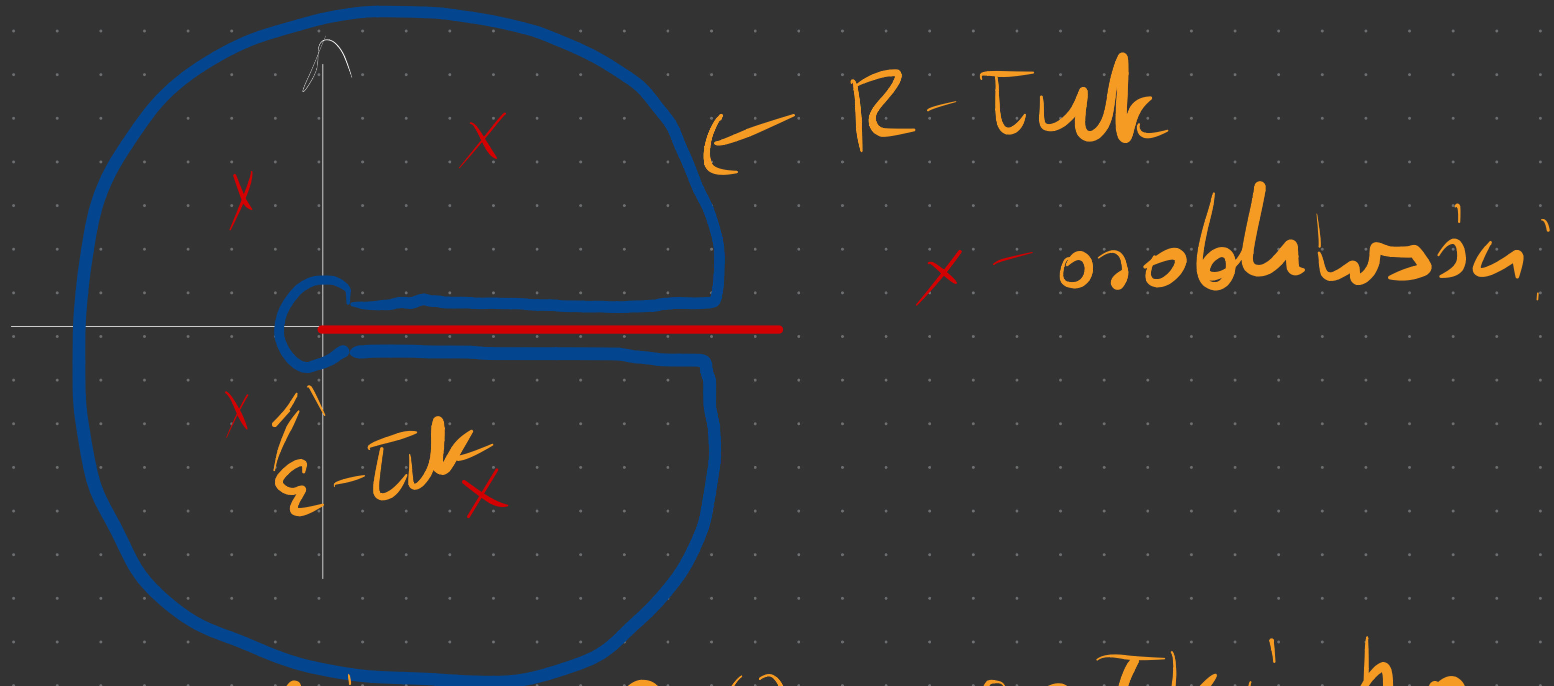
$$\frac{\pi}{2}\left(2^{\frac{1}{6}}-1\right).$$

Przykład całki postaci

$$\int_0^\infty \log(x) \cdot Q(x)\,dx.$$

Funkcje całkowane $w(z) = Q(z)(\log(z))^2$.

Kontur



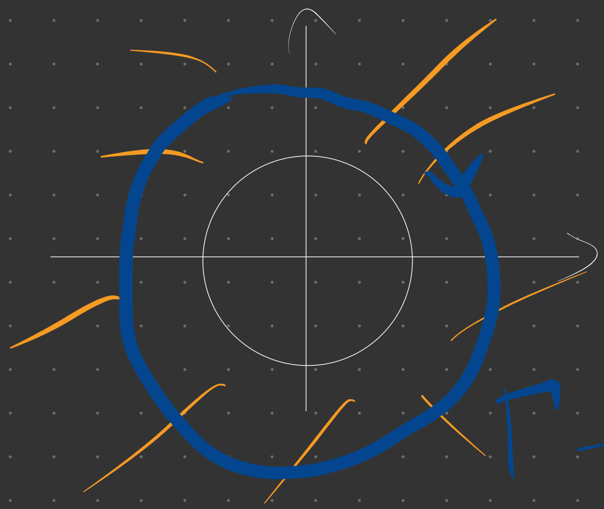
$\lim_{z\to 0} z\cdot Q(z) = 0 = \lim_{z\to\infty} zQ(z)$ - całki po łukach znikają.

Wzór res

$$\int_0^\infty (\log(x))^2 Q(x)\,dx - \int_0^\infty (\log(x)+2\pi i)^2 Q(x)\,dx = 2\pi i \sum_{z_j} \operatorname{res}_{z_j} Q(z)\,(\log z_j)^2$$

Res w ∞.

Niech w będzie funkcją holomorficzną na $\{|z|>R\}$ dla pewnego R



zbiór ten można uznać za otoczenie punktu w ∞.

Γ – krzywa Γ otacza punkt w ∞.

Definicja: liczbę zespoloną $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=S} w(z)\,dz$

nazywamy residuum w ∞ i oznaczamy $\operatorname{res}_{\infty} w(z)$.

Residuum a rozwinięcie w szereg Laurenta.

Funkcja $w: \{|z|>R\} \to \mathbb{C}$ ma rozwinięcie $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{w(z)}{z^{n+1}} dz$.

W szczególności $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\rho} \frac{w(z)}{z^n} dz$

i mamy wzór

$$\operatorname{res}_{\infty} w(z) = -a_{-1}.$$

Zamiane $\operatorname{res}_{\infty} w(z)$ na $\operatorname{res}_{0} \tilde{w}(z)$ dla pewnej funkcji $\tilde{w}(z)$ zdefiniowanej wokół zera. Rozważmy funkcję

$w\left(\frac{1}{z}\right)$ dla $\left|\frac{1}{z}\right| > R$ $\left(\Leftrightarrow |z| < \frac{1}{R}\right)$.

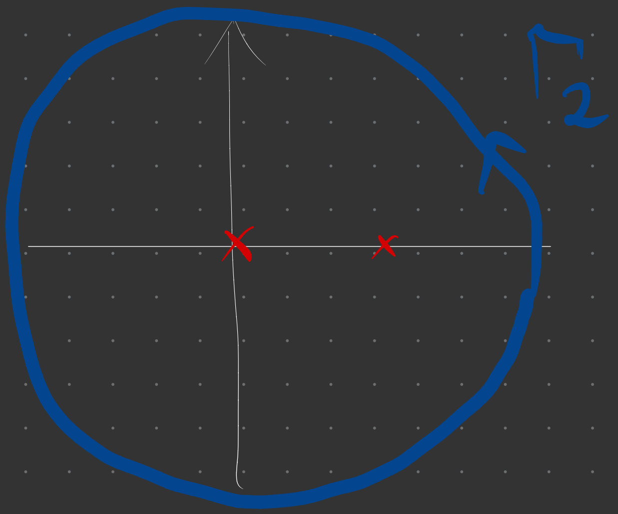
$$w\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \frac{1}{z^n} = \ldots + a_{-n} z^n + a_{-n+1} z^{n-1} + \ldots$$

$$\ldots + a_{-1} z + a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \ldots$$

$$w\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z^2} = \ldots + a_{-3} z + a_{-2} + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_0}{z^2} + \ldots$$

Zatem $\operatorname{res}_{\infty} w(z) = -\operatorname{res}_{0} \underbrace{\frac{1}{z^2} w\left(\frac{1}{z}\right)}_{\tilde{w}(z)}$.

Przykład Oblicz $\operatorname{res}_{\infty} \underbrace{\frac{5z-2}{z(z-1)}}_{w(z)} =$



$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} w(z)\, dz =$$

$$= -\left(\operatorname{res}_{0} w + \operatorname{res}_{1} w\right) = -\left(\frac{-2}{-1} + \frac{3}{1}\right) = -5.$$

Drugi sposób.

$$-\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^2}\, w\!\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^2}\,\frac{5\cdot\frac{1}{z}-2}{\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{1}{z}-1\right)} =$$

$$= -\operatorname{res}_0 \frac{1}{z^3}\,\frac{(5-2z)}{\cancel{\frac{1}{z^2}}(1-z)} = -5 .$$