Reguła(y) de l'Hospitala

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{[H]}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

przy pewnych warunkach.

Na przykład $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \overset{[H]}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1} = 1$

Tw (de l'Hospitala, wariant 1)

Niech $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w $x_0 \in]a,b[$ $\wedge$ $g'(x_0) \neq 0$

Jeśli $f(x_0) = 0 = g(x_0)$ wówczas $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

Dowód: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{g(x)-g(x_0)}\right] = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ $\boxed{\equiv}$

Tw. (de l'Hospitala, wariant 2).

$f, g : [a,b[$ - $\underbrace{\text{różniczkowalne na }]a,b[}_{f(a)=0=g(a)}$ & $g'(x) \neq 0$ $x \in]a,b[$

Jeśli istnieje $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ to $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Dowód: Cauchy $\leadsto$ $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \overset{\exists c_x \in]a,x[}{=} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[c_x\to a]{x\to a} A.$ $\boxed{\equiv}$

Wniosek z wariantu 2 tw de l'Hospitala.

$a>0$, $f, g :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ - ciągłe, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} g(x)$.

$\underbrace{f, g}_{\text{różniczkowalne na }]a,\infty[}$ & $g'(x) \neq 0$ $\forall_{x \in]a,\infty[}$.

Jeśli istnieje $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ to $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Dowód $G, F : [0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}$

$$F(t) = \begin{cases} f\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

$$G(t) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0. \end{cases}$$

Zauważmy, że $F, G : [0, \frac{1}{a}[\to \mathbb{R}$ i różniczkowalne na $]0, \frac{1}{a}[$.

Na przykład $F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)$.

Skoro $\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

to z tw. de l'Hospitala w.3 $\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)} = A$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}$$

Tw. de l'Hospitala w B

$f, g :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ - ciągłe i różniczkowalne, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty = \lim\limits_{x \to a} g(x)$, $g'(x) \neq 0$ dla $x \in]a, b[$.

Jeśli istnieje $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ to $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Dowód: Przypadek $A \in \mathbb{R}$. Niech $a < x < x_0 < b$.

Zauważmy, że $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot U(x_0, x)$ gdzie

$$U(x_0, x) = \frac{1 - \frac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}.$$

$\lim\limits_{x \to a} U(x_0, x) = 1$.

Zauważmy, że przy ustalonym x_0

Tw. Cauchy'ego $\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\exists c_x \in]x, x_0[}{=} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot U(x_0, x)$.

Dobieramy x_0 tak aby dla $c \in]a, x_0[$ $\left|\frac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < \varepsilon$. Niech $d < x_0$ będzie takie że dla $x \in]a, d[$ $|U(x_0, x) - 1| < \varepsilon$.

Wówczas dla $\underset{\sim}{x \in]a, d[}$ i x_0 j.w.

$\boxed{\varepsilon < 1}$ $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot U(x_0, x) - A\right| \ \ldots < 2\varepsilon.$

$$\overset{c_x \in]x, x_0[}{=} \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \cdot U(x_0, x) - A\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - A + \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} (U(x_0, x) - 1)\right|$$

$$\leqslant \varepsilon + (|A| + \varepsilon) \cdot \varepsilon \leqslant \varepsilon \cdot (|A| + 2)$$

Czyli $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} A$.

Co jeśli $A = +\infty$.

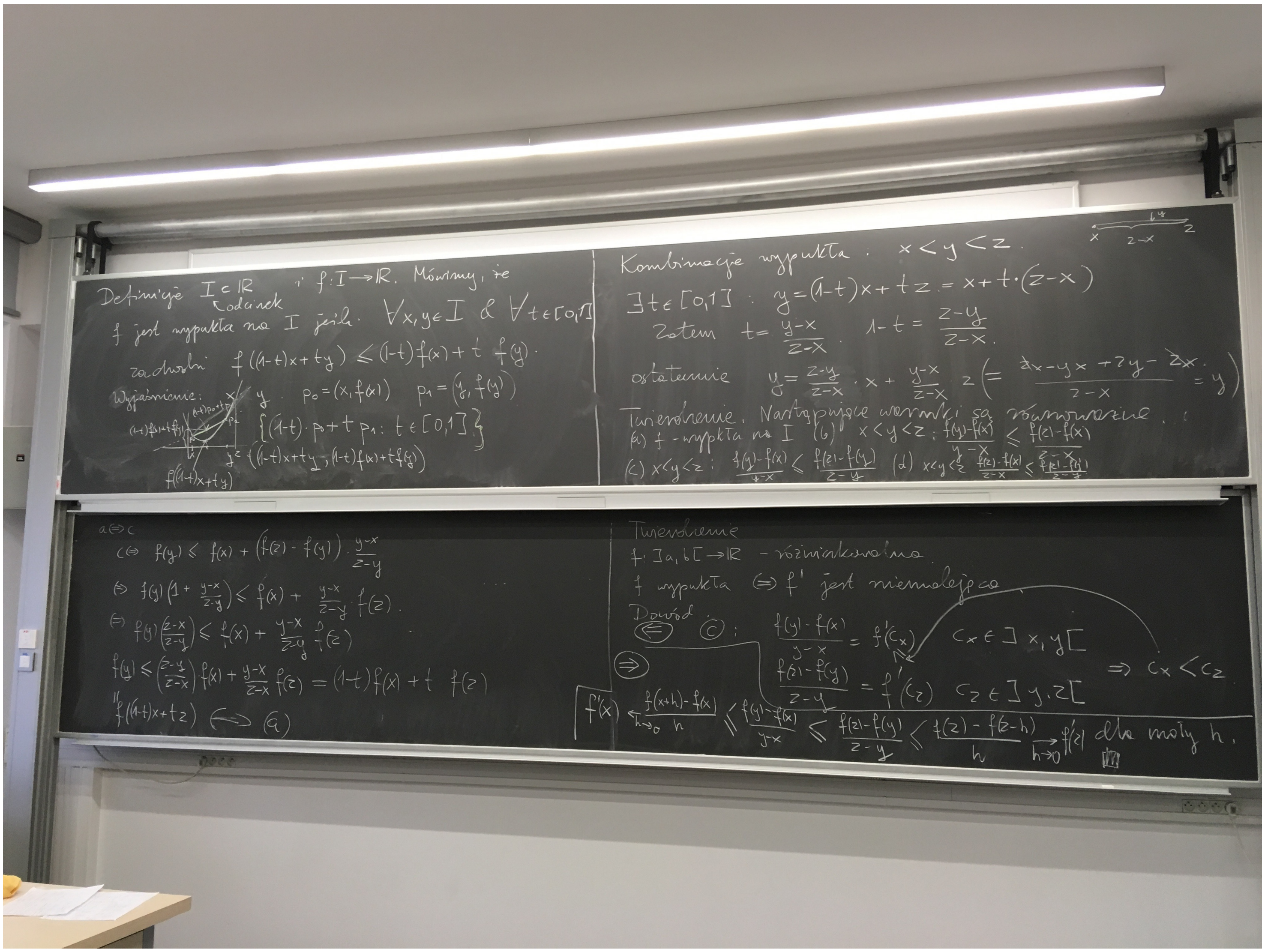
$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\right| \left|U(x_0, x)\right|.$$

to też jest b. duże

"bardzo duże."

$\geq \frac{1}{2}$ dla x dostatecznie bliskiego a.

Czyli $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ $\blacksquare$



Definicje $I \subset \mathbb{R}$ (odcinek) i $f: I \to \mathbb{R}$. Mówimy, że f jest wypukła na I jeśli $\forall x, y \in I$ & $\forall t \in [0,1]$ zachodzi $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + t\,f(y)$.

Wyjaśnienie: x, y. $p_0 = (x, f(x))$ $p_1 = (y, f(y))$

$\{(1-t)\cdot p_0 + t\,p_1 : t \in [0,1]\}$

$((1-t)x + ty, (1-t)f(x) + tf(y))$

$(1-t)f(x) + tf(y)$, $(1-t)p_0 + tp_1$, p_0, p_1, x, y, z, $f((1-t)x + ty)$

Kombinacja wypukła: $x < y < z$.

x $z-x$ z y

$\exists t \in [0,1]$: $y = (1-t)x + tz = x + t\cdot(z-x)$

Zatem $t = \frac{y-x}{z-x}$. $1-t = \frac{z-y}{z-x}$.

ostatecznie $y = \frac{z-y}{z-x}\cdot x + \frac{y-x}{z-x}\cdot z \left(= \frac{\cancel{zx} - yx + zy - \cancel{zx}}{z-x} = y\right)$

Twierdzenie. Następujące warunki są równoważne:

(a) f - wypukła na I (b) $x<y<z$: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$

(c) $x<y<z$: $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$ (d) $x<y<z$ $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

a $\Leftrightarrow$ c

c $\Leftrightarrow$ $f(y) \leq f(x) + (f(z) - f(y))\cdot\frac{y-x}{z-y}$

$\Leftrightarrow$ $f(y)\left(1 + \frac{y-x}{z-y}\right) \leq f(x) + \frac{y-x}{z-y}\cdot f(z)$.

$\Leftrightarrow$ $f(y)\left(\frac{z-x}{z-y}\right) \leq f(x) + \frac{y-x}{z-y} f(z)$

$f(y) \leq \left(\frac{z-y}{z-x}\right) f(x) + \frac{y-x}{z-x} f(z) = (1-t)f(x) + t\,f(z)$

$\shortparallel$

$f((1-t)x + tz)$ $\Leftrightarrow$ (a)

Twierdzenie

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ - różniczkowalna.

f wypukła $\Leftrightarrow$ f' jest niemalejąca

Dowód.

$\Leftarrow$ (c): $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c_x)$ $c_x \in]x,y[$

$\frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(c_z)$ $c_z \in]y,z[$ $\Rightarrow$ $c_x < c_z$

$\Rightarrow$

$f'(x) \xleftarrow[h\to 0]{} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \frac{f(z)-f(z-h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(z)$ dla mały h.