1. O czym będzie mowa: (1)

liczby rzeczywiste, ciągi i ich granice, funkcje exp, log, sin, cos ..., szeregi, funkcje ciągłe, rachunek różniczkowy, całka Riemanna

2. Z czego się uczyć, co czytać

Paweł Strzelecki Analiza I skrypt wykładu

Walter Rudin Podstawy analizy matematycznej

Terence Tao Analysis I

→ Po co to?

– Na potrzeby fizyki – w języku analizy matematycznej wyraża się wiele praw fizyki

– Analiza jest trudna. Wymaga precyzyjnego zdyscyplinowanego myślenia i używania pojęć i metod. Używanie ich w sposób swobodny prowadzi do błędów rozumowań, a ich chcemy uniknąć.

Przykłady błędnych rozumowań

(1) Rozważmy szereg geometryczny

$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

$2S = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2 + S \Rightarrow S = 2$

Jednakże jeśli zastosujemy ten sam trik do

$S = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots \Rightarrow 2S = S - 1 \quad S = -1$ – absurd

Gdzie popełniliśmy błąd.

(2) Niech x będzie liczbą rzeczywistą i niech

$L = \lim_{n\to\infty} x^n = \lim_{n+1\to\infty} x^{n+1} = x \lim_{n+1\to\infty} x^n = xL$

$xL = L$ zatem $x = 1$ dla każdej liczby rzeczyw.

Ale zaraz, może dzielimy przez zero $L = 0$.

$x = 0$ lub $x = 1$ etc.

Musimy to wszystko doprecyzować

Zacznijmy więc od zera: zdania logiczne ②

Przykład

"Dwa dodać dwa jest równe cztery" - zdanie prawdziwe

"Dwa dodać dwa jest równe pięć" - zdanie fałszywe

Przykład wyrażenia które nie jest zdaniem logicznym. Nie jest ono prawidłowo sformułowane

"Zero podzielić przez zero jest równe 1"

to nie jest zdanie logiczne nie możemy mu przypisać wartości logicznej.

Wartość logiczna zdania logicznego wynosi

- zero jeśli jest ono fałszywe
- jeden jeśli jest ono prawdziwe.

Zdanie logiczne to zdanie które jest prawdziwe lub fałszywe, ale nie może być jednocześnie prawdziwe i fałszywe.

Abstrakcje/Notacja: $p, q, r, \dots$ - symbole oznaczenia zdań.

Ze zdań logicznych można budować zdania logiczne złożone

$p \wedge q =$ "p i q" - koniunkcja zdań

"$2+2=4$ i $3+3=6$" - prawdziwe

"$2+2=4$ i $3+3=4$" - fałszywe

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q)$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

$\boxed{\sim p \vee \sim q \Leftrightarrow \sim(p \wedge q)}$

$p \vee q =$ "p lub q"

"$2+2=4$ lub $3274+7115=1149$"

"$2+2=5$ lub $3274+7115=1149$"

?

Negacje

$\sim p$ = "Nie prawda, że p" $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.

Tautologią nazywamy zdanie logiczne złożone, którego wartość logiczna jest 1 niezależnie od wartości logicznych zdań składowych. Przykłady prawa de Morgana

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Implikacje: $p \Rightarrow q$ = "Jeśli p jest zdaniem prawdziwym to q jest zdaniem prawdziwym"

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
1	1	1	1	
1	0	0	0	
8	1	1	1	
	0	1		

Przykład Niech x będzie liczbą całkowitą. Wówczas zdanie "jeśli $x=2$ to $x^2=4$" jest zdanie prawdziwym. Podstawmy, że x różne liczby i sprawdźmy co się dzieje

$x=2$ "jeśli $2=2$ to $2^2=4$" - zdanie prawdziwe

$x=3$ "jeśli $3=2$ to $3^2=4$" - −//− //−−//−−−//−−

$x=-2$ "jeśli $-2=2$ to $(-2)^2=4$" - −//−−−//−−−//−

Zdanie "Jeśli $x=2$ to $x=1$" nie jest zdaniem prawdziwym.

Zasada indukcji matematycznej (4)

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ – zbiór liczb naturalnych

Jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy zdanie logiczne p_n oraz

(1) p_0 jest zdaniem prawdziwym

(2) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $(p_n \Rightarrow p_{n+1})$ jest zdaniem prawdziwym to

WSZYSTKIE zdania p_n są prawdziwe

Przykład

Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ zachodzi

" $0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ " $= p_n$

początek indukcji

(1) p_0 $0 = 0$ – zdanie prawdziwe

(2) Krok indukcyjny

czy $(p_n \Rightarrow p_{n+1})$?

"Jeśli p_n jest zdaniem prawdziwym to p_{n+1} jest zdaniem prawdziwym"

Przypuśćmy, że $0+1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Wtedy $0+1+2+\ldots+n+n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

czyli p_{n+1} jest zdaniem prawdziwym.

Przykład/zagadka

Plemię osób z czerwonymi lub zielonymi oczami. Zasada: jeśli dowiesz się, że masz czerwone oczy następnego dnia popełniasz samobójstwo

Stan ustalony (panuje tabu brak luster)

i nikt nie popełnia samobójstwa. ⑤
Na wyspę przypływa rozbitek i w obecności wszystkich wygłasza zdanie.
"Są wśród was osoby z czerwonymi oczami". Wykazać, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oznacza liczbę osób z czerwonymi oczami to n dni po przypłynięciu rozbitka wszyscy popełnią samobójstwo.
Kwantyfikator ogólny
$\forall_{n \in \mathbb{N}} p_n$ = "zdanie p_n są prawdziwe dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$"
$\forall_{x \in A}$ "Dla wszystkich x ze zbioru A"

$\exists_{n \in \mathbb{N}} p_n$ - "Dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zdanie p_n jest prawdziwe"

$\exists_{x \in A}$ - "Istnieje x ze zbioru A takie, że"
Zbiór jest pojęciem pierwotnym nie definiujemy go.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ - zbiór liczb naturalnych
Jeśli a jest elementem zbiór A to piszemy $a \in A$

$A \cup B$, $A \setminus B$, $A \cap B$
Nie wszystkie operacje na zbiorach są dozwolone, gdyby tak było, to mielibyśmy sprzeczność!