Funkcja Gaussa e^{-x^2}, ogólniej $e^{-(x-x_0)^2 t^2}$

Obliczyć $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \overset{?}{=} \sqrt{\pi} = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$; $\frac{\partial}{\partial t} e^{-x^2t^2} = -2t x^2 e^{-x^2t^2}$

Funkcja pierwotna e^{-x^2}: $\int_0^x e^{-t^2}dt$.

Całki z parametrem: $F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$. Jak do tej.

parametr

wycałkowana zmienna

zmienna

Zał. $-\infty < a < b < +\infty$

– f - ciągła od x i t to F - ciągła od t.

– f ma ciągłą pochodną cząstkową $\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \Longrightarrow$ F - różniczkowalna.

$\boxed{F'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx}$

Całki niewłaściwe z parametrem: $\int_0^{+\infty} f(x,t)\,dx$

Przykład: Rozważmy $F(t)=\int_0^{\infty} \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$.

$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$

Własności (1) F - okazuje się, że F jest ciągła dla $t \in [0,\infty]$ oraz różniczkowalna dla $t\in\,]0,\infty[$.

(2) $F(0) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$, $F(\infty) = 0$

Obliczmy pochodną F: $F'(t) \underset{tw.\ldots}{=} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\right)dx = -2te^{-t^2}\int_0^{\infty} e^{-t^2x^2}dx$

$= \left\{ \begin{matrix} y = tx \\ y\in[0,\infty[\end{matrix} \right\} = -2e^{-t^2}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$ Całkujemy obie strony od 0 do ∞.

$0 - \frac{\pi}{2} = F(\infty) - F(0) = \int_0^{\infty} F'(t)\,dt = -2\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = -2\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2$.

Zatem: $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Teoria całki niewłaściwej z parametrem.

$f: \underset{\substack{\in\\ x}}{[0,\infty[} \times \underset{\substack{\in\\ t}}{]c,d[} \longrightarrow \mathbb{R}$ - ciągła ze względu na x, t i dla $t\in\,]c,d[$ istnieje całka $\int_0^{\infty} f(x,t)\,dx$

$F(t) = \int_0^{\infty} f(x,t)\,dx$ oraz dla $0\le M<\infty$ definiujemy $F_M(t) = \int_0^M f(x,t)\,dx$.

Zauważmy, że $F(t) = \lim_{M\to\infty} F_M(t)$ – punktowa zbieżność.

Funkcje F_M są ciągłe w t.

Definicja: Mówimy, że całki $\int_0^{\infty} f(x,t)\,dx$ są jednostajnie zbieżne na $t\in\,]c,d[$ jeśli jeden z równoważnych warunków jest spełniony

(a) $F_M \underset{M\to\infty}{\rightrightarrows} F$ (to znaczy $\sup_{]c,d[} |F(t) - F_M(t)| \xrightarrow[M\to\infty]{} 0$.

$\Updownarrow$

(b) $\forall \varepsilon>0\ \exists M_0: M_2 > M_1 > M_0$ to $\left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$ dla wszystkich $t\in\,]c,d[$.

Rozważmy rodzinę funkcji $\left(F_M(t)\right)_{M\in\mathbb{R}_+}$.

(a) F_M są funkcjami różniczkowalnymi oraz $F_M' = \frac{d}{dt}\int_0^M f(x,t)\,dx = \int_0^M \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx \underset{M\to\infty}{\rightrightarrows} \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

(b) $\exists\, t_0 : F_M(t_0)$ – zbieżny dla $M\to\infty$.

Konkluzje (podobne) $F_M \underset{M\to\infty}{\rightrightarrows} F$, F jest różniczk. i $F'(t) =$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{d}{dt}\int_0^M f(x,t)\,dx = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Jak sprawdzić jedn. zb. całki ???!

Twierdzenie (Kryterium Weierstrassa).

PISEMNY.
PIĄTEK 14-18
USTNY
PON: 16-17

Przypuśćmy istnieje funkcja $\varphi : [0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ t. że

(1) $|f(x,t)| \leq \varphi(x)$ dla wszystkich x i t.

(2) $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx < \infty$. Wówczas $\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ jest jednostajnie zbieżna.

Dowód; $\varepsilon>0\ \exists\, M_0 : M_2 > M_1 > M_0 : \int^{M_2} \varphi(x)\,dx < \varepsilon \Leftarrow$ (2). W takim razie

$\Longrightarrow \left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t)\,dx\right| \leq \int_{M_1}^{M_2} |f(x,t)|\,dx \leq \int_{M_1}^{M_2} \varphi(x)\,dx < \varepsilon$ dla wszystkich t. $\blacksquare$

Przykład

(i) Jednostajna zb. całki $\int_0^\infty \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx$, $\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} = f(x,t)$

Niech $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\int_0^\infty \varphi(x)\,dx = \frac{\pi}{2} < \infty$

Zauważmy, że $|f(x,t)| \leq \varphi(x)$ dla $t\in[0,\infty]$

Wniosek $F(t)$ ciągła oraz $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$.

(ii) Czy $F'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$? Tak jeśli prawa strona zbieżna jed. na $t\in\,]\varepsilon,\infty[$. $= -2te^{-t^2}\int_0^\infty \underbrace{e^{-t^2x^2}}_{g(x,t)}\,dx$. Niech $\tilde{\varphi}(x) = e^{-\varepsilon^2x^2}$. $|g(x,t)| \leq e^{-\varepsilon^2x^2}$.

$\int_0^\infty e^{-\varepsilon^2x^2} < \infty$. A więc $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$ jest jednostajnie zbieżna.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

ustalamy $m \in \mathbb{N}$ $\quad A_{m-1} = 0.$

$$A_n = \sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

↖ małe jeśli m, n - duże.

Kryterium Abela v.2

Jeśli: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - zbieżny szereg liczbowy

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg monotoniczny i ograniczony. $|b_n| < M$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$

to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

$$a_m b_m + a_{m+1} b_{m+1} + \dots + a_n b_n = \underbrace{(A_m - A_{m-1})}_{a_m} b_m + (A_{m+1} - A_m) b_{m+1} + \dots + (A_n - A_{n-1}) b_n$$

$$= A_m (b_m - b_{m+1}) + A_{m+1}(b_{m+1} - b_{m+2}) + \dots + A_{n-1}(b_{n-1} - b_n) + A_n b_n$$

Zatem $|a_m b_m + \dots + a_n b_n| \leqslant \sum_{m}^{n-1} |A_i||b_i - b_{i+1}| + |A_n||b_n|.$

Niech m: $\underline{|A_i| < \varepsilon}$ dla wszystkich $i \geqslant m$.

$$\leqslant \varepsilon \sum_{m}^{n-1} |b_i - b_{i+1}| + \varepsilon M$$

{ Bez straty ogólności { zał. $b_i > b_{i+1}$.

$$\leqslant \varepsilon \sum_{m}^{n-1} (b_i - b_{i+1}) + \varepsilon M = \varepsilon (b_m - b_n) + M \cdot \varepsilon \leqslant \varepsilon \cdot 2M + \varepsilon M$$

$= 3\varepsilon M$. - spełniony jest war. Cauchy'ego dla $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$

zatem jest on zbieżny.

Twierdzenie: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - zbieżny jednostajnie, $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg funkcyjny monotoniczny ze względu na n, oraz $|g_n(x)| < M$ $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall_{x\in A}$.

dziedzina f_n, g_n.

Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ jest zbieżny jednostajnie.

Dowód: ...

Kryterium Abela dla całek z parametrem.

<u>Twierdzenie</u> Przypuśćmy, że $\int_0^{\infty} f(x,t)\,dx$ jest jednostajnie zbieżna oraz mamy $g(x,t)$ t. że $\forall_{t\in]c,d[}$ funkcje $x \longmapsto g(x,t)$ jest monotoniczna oraz $|g(x,t)| < M$ dla wszystkich x oraz t,

Wtedy $\int_0^{\infty} f(x,t)\, g(x,t)\,dx$ jest jednostajnie zbieżna.

Dowód: Weźmy $\varepsilon > 0$; skoro $\int_0^{\infty} f(x,t)\,dx$ jest jednostajnie zbieżna to $\exists\, M_0 : M_2 > M_1 > M_0$ to $\left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t)\,dx\right| < \varepsilon$ dla wszystkich t.

Przypomnienie: $\int_a^c \underset{\text{ciągła}}{h(x)} \cdot \underset{\text{ciągła monotoniczna}}{\tilde{h}(x)}\,dx = \tilde{h}(a)\int_a^b h(x)\,dx + \tilde{h}(c)\int_b^c h(x)\,dx \qquad a < b < c$

istnieje takie b

$$\text{Zatem: } \left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t) g(x,t)\right| \leqslant \underbrace{|g(M_1,t)|}_{M} \underbrace{\left|\int_{M_1}^{c(t)} f(x,t)\,dx\right|}_{\varepsilon} + \underbrace{|g(M_2,t)|}_{M} \underbrace{\left|\int_{c(t)}^{M_2} f(x,t)\,dx\right|}_{\varepsilon} \leqslant 2M\cdot\varepsilon$$

$\blacksquare$

K. DIRICHLETA

$$\left.\begin{array}{l}(a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{(}b_n\text{ monotoniczny, } b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\text{)} \\ \left|\sum_{1}^{N} a_n\right| < M \ \text{ dla wszystkich } N.\end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ - zbieżny.}$$

Dla szeregów funkcyjnych

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ t. że $\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| < M$ dla wszystkich N i x.

oraz $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ - monotoniczny i $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Wówczas $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ zbiega jednostajnie.

Twierdzenie: $f(x,t)$ - ciągła oraz $\left|\int_0^R f(x,t)\,dx\right| < M$ ← dla wszystkich $R \geq 0$.

oraz $g(x,t)$ - monotoniczny w x i $g(x,t) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0$.

Wówczas $\int_0^\infty f(x,t)\, g(x,t)\,dx$ zbiega jednostajnie.

Dowód: Skoro $\left|\int_0^R f(x,t)\,dx\right| < M$ to $\left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t)\,dx\right| \leq 2M$.

skoro $g(x,t) \underset{x\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists M_0 \colon x > M_0$ to $|g(x,t)| < \varepsilon$. W końcu

Dla $M_2 > M_1 > M_0$: $\left|\int_{M_1}^{M_2} f(x,t) g(x,t)\,dx\right| \leq |g(M_1,t)| \left|\int_{M_1}^{c(t)} f(x,t)\right| + |g(M_2,t)| \left|\int_{c(t)}^{M_2} f(x,t)\right| \leq \varepsilon 2M + \varepsilon 2M = 4M\varepsilon$ ∎

Przykład $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$ - całka zbieżna, wartość całki ???

Rozważmy całkę z parametrem $F(t) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(x)}{x}\,dx & 0 \leq t < \infty \\ 0 & t = +\infty \end{cases}$

Interesuje nas $\boxed{F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx}$

Fakt 1 $\boxed{F\text{ - ciągła w } t}$; w szczególności $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$

Kryterium Abela: $f(x,t) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x,t) = e^{-tx}$ - ogr. i monotoniczna

Fakt 2 F jest różniczkowalne na $]0,\infty[$

$$F'(t) \overset{?}{=} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)dx = -\int_0^\infty \underbrace{e^{-tx}\sin x}_{\text{zbieżna jedn. } t\in]\varepsilon,\infty[}\,dx \overset{\text{obliczyć}}{=} -\frac{1}{1+t^2}.$$

na mocy kryt. Weierstrassa: $\varphi(x) = e^{-\varepsilon x} \geq |e^{-tx}\sin(x)|$

całka $-\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ - zb. jedn. W szczególności $F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin(x)\,dx$

dla $t > \varepsilon$. Biorąc $\varepsilon \to 0 \Rightarrow$ dla wszystkich $t > 0$.

$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \rightsquigarrow F(t) = -\operatorname{arctg}(t) + C$. $t \in]0,\infty[$. gdzie $C = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$

$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

Przykład $\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}}$ — całka zbieżna, wartość całki ???

Rozważmy całkę z parametrem $F(t) = \begin{cases} \int_0^\infty e^{-tx}\cdot\frac{\sin(x)}{x}\,dx & 0<t<\infty \\ 0 & t=+\infty \end{cases}$

Interesuje nas $\boxed{F(0)=\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx}$

<u>Fakt 1</u> $\boxed{F\text{ - ciągła w } t}$; w szczególności $\lim_{t\to\infty} F(t) = 0$

Kryterium Abela: $f(x,t) = \frac{\sin x}{x}$, $g(x,t) = e^{-tx}$ — ogr. i monotoniczna

<u>Fakt 2</u> F jest różniczkowalne na $]0,\infty[$

$$F'(t) \overset{?}{=} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\right)dx = -\int_0^\infty \underbrace{e^{-tx}\sin x}_{\text{zbieżna jedn. } t\in]\varepsilon,\infty[}\,dx \overset{\text{obliczyć}}{=} -\frac{1}{1+t^2}$$

na mocy kryt. Weierstrassa; $\varphi(x) = e^{-\varepsilon x} \geq |e^{-tx}\sin(x)|$

całka $-\int_0^\infty e^{-tx}\sin x\,dx$ — zb. jedn. W szczególności $F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx}\sin(x)$

dla $t>\varepsilon$. Biorąc $\varepsilon\to 0 \Rightarrow$ dla wszystkich $t>0$.

$F'(t) = -\frac{1}{1+t^2} \rightsquigarrow F(t) = -\operatorname{arctg}(t) + C$. $t\in]0,\infty[$. gdzie $C = F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,d$

$\lim_{t\to\infty} F(t) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$

$|x-y| \rightsquigarrow \|x-y\|$.

Norma pitagorejska w $\mathbb{R}^k$. $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$.

Norma x: $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^k |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$,

odległość $x,\tilde{x}\in\mathbb{R}^k$: $\|x-\tilde{x}\| = \left(\sum_{i=1}^k |x_i - \tilde{x}_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Ciąg elementów $\mathbb{R}^k$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$; $x_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{bmatrix} = [x_{n,j}]_{j\in\{1,\dots,k\}}$, $n\in\mathbb{N}$

Definicja Mówimy, że $x\in\mathbb{R}^k$ jest granicą ciągu $(x_n)\subset\mathbb{R}^k$

jeśli $\forall_{\varepsilon>0}\exists_N: n>N: \|x_n - x\| < \varepsilon$.

$\mathbb{R}^k$, $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_k^2)^{\frac{1}{2}}$. $d(x, \tilde{x}) = \|x - \tilde{x}\|$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_k \end{bmatrix} = [x_1 \ldots x_k]^T$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$, $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$; $\begin{bmatrix} x_{n,1} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{bmatrix} \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ gdy

$\|x_n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; równoważnie $\forall_{i \in \{1, \ldots, k\}}$ $x_{n,i} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$

Kule w $\mathbb{R}^k$. $K(x, r) = \{\tilde{x} : \|x - \tilde{x}\| < r\}$

Definicja. Mówimy, że zbiór $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty jeśli

$\forall x \in \mathcal{O}\ \exists r > 0\ \ K(x, r) \subset \mathcal{O}$.

Przykład

Zbiór $A = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} : x_1 > 0 \right\}$ jest otwarty

$B = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} : x_1 \geq 0 \right\}$ nie jest otwarty; jest domknięty.

Definicja.

Mówimy, że $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^k$ jest domknięty jeśli zbiór

$\mathbb{R}^k \setminus \mathcal{C}$ jest otwarty.

Na przykład: skoro $\mathbb{R}^k \setminus B = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} : x_1 < 0 \right\}$ to B jest domknięty

jest otwarty

Stwierdzenie. Niech $B \subset \mathbb{R}^k$.

Następujące warunki są równoważne

① B jest domknięty.

② jeśli $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$. $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ to $x \in B$.

Dowód. Przypuśćmy, że ② nie jest spełniony.

to mamy jakiś $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ $x_n \to x \in \mathbb{R}^k \setminus B$.

to $\mathbb{R}^k \setminus B$ nie jest otwarty, gdyż $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$: $n > N$

$B \ni x_n \in K(x, \varepsilon)$ czyli $K(x, \varepsilon) \cap B \supset \{x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots\}$

i widać, że $K(x, \varepsilon)$ nie jest zawarte w B (dla wszystkich $\varepsilon > 0$)

zatem $\mathbb{R}^k \setminus B$ nie jest otwarty (① nie jest spełniony).

Na odwrót jeśli ① nie jest spełniony to istnieje

"zielony" punkt $x \in \mathbb{R}^k \setminus B$ t. że $\forall_{\varepsilon > 0}$ $K(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset$.

Biorąc $\varepsilon = \frac{1}{n}$ wybierzmy punkt $x_n \in B \cap K(x, \frac{1}{n})$

dostajemy ciąg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B$ & $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in \mathbb{R}^k \setminus B$ ▨

(nie zachodzi ②)

Definicja: Mówimy, że zbiór $K \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty jeśli z każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ można wybrać podciąg (x_{k_n}) zbieżny ciągu (x_n) do granicy $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in K$.

Twierdzenie $K \subset \mathbb{R}^k$ jest zwarty $\Leftrightarrow$ K - domknięty i ograniczony

Przykład: kula $\overline{K(0,1)} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1^2 + \dots + x_k^2 \leqslant 1 \right\}$ jest zwarta.

Dowód: $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ i $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Czy $x \in K$? Tak.

Rzeczywiście $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x \in K$. Gdyby K nie był ograniczony to $K \cap \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| > n\} \neq \emptyset$ dla wszystkich n!

Wybieramy ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$, $\|x_n\| > n$, z którego nie da się wybrać podciągu zbieżnego.

$\Leftarrow$ K - domknięty i ograniczony. (przyjmujemy, że $k=2$).

Niech $\left(x_n = \begin{bmatrix} x_{n,1} \\ x_{n,2} \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Skoro K - ogr. to $(x_{n,1})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony. Niech $x'_{n,1}$ będzie podciągiem zbieżnym $x_{n,1}$,

Wówczas $\left(x'_n \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x'_{n,1} \\ x'_{n,2} \end{bmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ jest taki, że $(x'_{n,1})_n$ - zbieżny oraz $(x'_{n,2})$ - ograniczony.

Niech $(x''_{n,2})$ będzie podciągiem zbieżnym ciągu $(x'_{n,2})$

wtedy $x''_n = \begin{bmatrix} x''_{n,1} \\ x''_{n,2} \end{bmatrix}$ jest podciągiem zbieżnym ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$

i $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n \in K$. ☒

Odwzorowania ciągłe: Niech $A \subset \mathbb{R}^k$. Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}^l$ jest odwzorowaniem ciągłym w punkcie $x \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ dla $\tilde{x} \in A$: $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ mamy $\|f(x) - f(\tilde{x})\| < \varepsilon$.

Równoważnie: jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ - ciąg zbieżny do $x \in A$ to $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Odwzorowanie $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest postaci $f(x_1, \dots, x_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_k) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \dots, x_k) \end{bmatrix}$

Uwaga f jest ciągła $\Leftrightarrow$ $f_1, \dots, f_l$ są funkcjami ciągłymi.

równoważnie sformułowanie:

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta$: $\tilde{x} \in K(x, \delta) \Rightarrow f(\tilde{x}) \in K(f(x), \varepsilon)$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad K(x,\delta) \subset f^{-1}(K(f(x), \varepsilon)) = \{\tilde{x} \in A : f(\tilde{x}) \in K(f(x), \varepsilon)\}$.

<u>Tw 2</u> $K \subset A$ - zwarty oraz $f: A \to \mathbb{R}^l$ jest ciągła to $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ jest zwarty.

Niech $(x''_{n,2})$ będzie podciągiem zbieżnym ciągu $(x'_{n,2})$.

wtedy $x''_n = \begin{bmatrix} x''_{n,1} \\ x''_{n,2} \end{bmatrix}$ jest podciągiem zbieżnym ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$

i $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n \in K$. ☒

Odwzorowania ciągłe: Niech $A \subset \mathbb{R}^k$. Mówimy, że $f: A \to \mathbb{R}^l$

jest odwzorowaniem ciągłym w punkcie $x \in A$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ dla $\tilde{x} \in A$: $\|x - \tilde{x}\| < \delta$ mamy $\|f(x) - f(\tilde{x})\| < \varepsilon$.

Równoważnie: jeśli $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ - ciąg zbieżny do $x \in A$ to $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Odwzorowanie $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$ jest postaci $f(x_1, \ldots, x_k) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_k) \\ \vdots \\ f_l(x_1, \ldots, x_k) \end{bmatrix}$

Uwaga f jest ciągła $\iff$ $f_1, \ldots, f_l$ są funkcjami ciągłymi.

równoważnie sformułowanie:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$: $\tilde{x} \in K(x, \delta) \Rightarrow f(\tilde{x}) \in K(f(x), \varepsilon)$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \quad K(x, \delta) \subset f^{-1}(K(f(x), \varepsilon)) = \{\tilde{x} \in A : f(\tilde{x}) \in K(f(x), \varepsilon)\}$.

<u>Tw 2</u> $K \subset A$ - zwarty oraz $f: A \to \mathbb{R}^l$ jest ciągła to

$f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ jest zwarty.

Dowód. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. Niech $(x'_n) \subset K$

Niech $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$

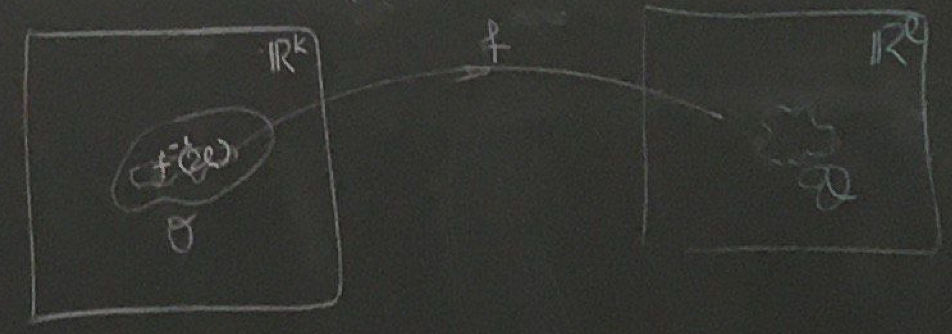
będzie podciągiem zbieżnym ciągu (x_n) do granicy $x \in K$.

Wówczas $y'_n = f(x'_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \in f(K)$.

Twierdzenie Jeśli $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ jest otwarty oraz $f: \mathcal{O} \to \mathbb{R}^l$

to następujące warunki są równoważne.

① f - jest ciągła na $\mathcal{O}$. ② Jeśli $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^l$ jest otwarty to $f^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^k$ też jest otwarty



①$\Leftarrow$② $\mathcal{U} = K(f(x), \varepsilon)) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{U})$ - otwarty podzbiór $\mathcal{O}$.

Ponadto $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ - zb. otw a więc $K(x, \delta) \subset f^{-1}(K(f(x), \varepsilon))$

①$\Rightarrow$② $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^l$ - otwarty i $f(x) \in \mathcal{U}$. Wtedy $\exists \varepsilon > 0 \ K(f(x), \varepsilon) \subset \mathcal{U}$

Wówczas $x \in f^{-1}(\mathcal{U})$ & istnieje $\delta > 0 \quad K(x, \delta) \subset f^{-1}(K(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(\mathcal{U})$

Zatem $f^{-1}(\mathcal{U})$ - otwarty ☒