Twierdzenie

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ – różniczkowalna

f – wypukła $\Longleftrightarrow$ f' jest niemalejąca

W20 | Rachunek całkowy

Teoria całki: Riemanna

Ciągłość

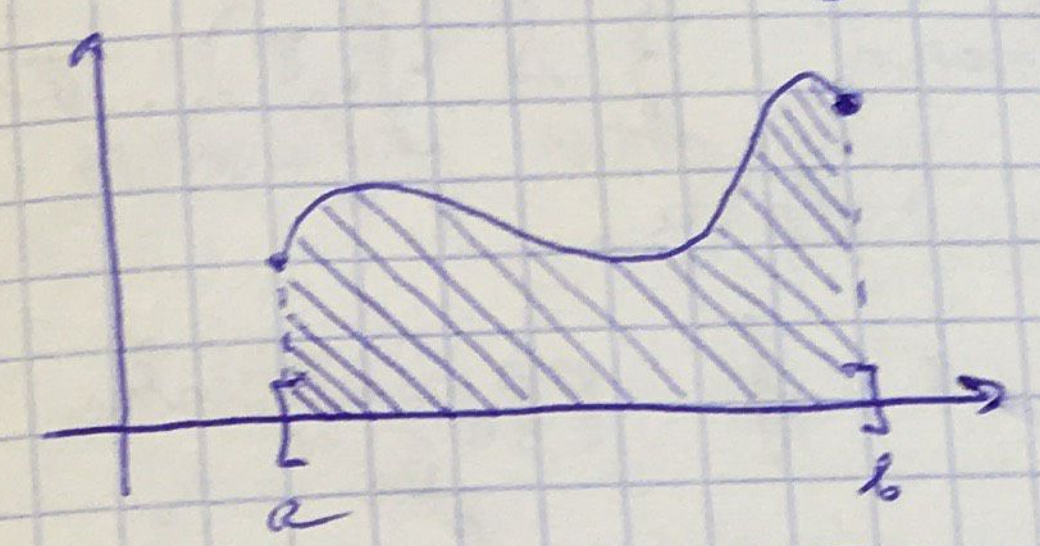
Różniczkowalność

Granicy f-cji

Szeregi

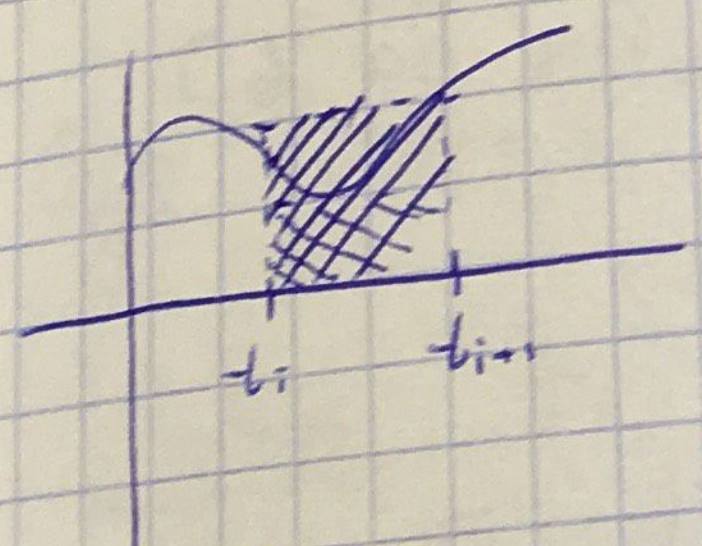
Całka Lebesgue

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ – ograniczona



Definicja: Podziałem π odcinka $[a,b]$ nazywamy skończony ciąg liczb $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ taki, że $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$.

- Suma górna: $\overline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[t_{i-1}; t_i]}(f) \cdot (t_i - t_{i-1})$.
- Suma dolna: $\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{[t_{i-1}; t_i]}(f) \cdot (t_i - t_{i-1})$



\\\\\\ – składnik sumy dolnej

//// – składnik sumy górnej

- Mówimy, że podział $\pi' = (s_0, s_1, \dots, s_k)$ jest drobniejszy niż podział $\pi = (t_0, \dots t_l)$, jeśli $\{t_0, \dots, t_l\} \subset \{s_0, s_1, \dots, s_k\}$.

Piszemy $\pi \lesssim \pi'$.

Ciąg zbieżny

Zauważmy, że jeśli $\pi \lesssim \pi'$, to

$$\overline{S}(f, \pi) \geq \overline{S}(f, \pi')$$
$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{S}(f, \pi').$$

Ponadto, dla dowolnego podziału π'':

$$\overline{S}(f, \pi'') \geq \underline{S}(f, \pi'')$$

Zauważmy, że dla podziałów π_1, π_2 odcinka $[a,b]$ istnieje podział π_3 drobniejszy od π_1 oraz π_2.

$\pi_1 = (t_0, \dots, t_k)$, $\pi_2 (s_0, \dots s_l)$. Ustawiając elementy zbioru $\{t_0, \dots, t_k, s_0, s_l\}$ w kolejności rosnącej dostajemy π_3, j.w.

Zatem $\underline{S}(f, \pi_1) \leq \underline{S}(f, \pi_3) \leq \overline{S}(f, \pi_3) \leq \overline{S}(f, \pi_2)$.

W szczególności $\{\overline{S}(f, \pi) : \pi - \text{podziały } [a,b]\}$ jest ograniczony z dołu.

Całkę górną z f po odcinku $[a,b]$ nazywamy $\inf\limits_{\pi - \text{podziały } [a,b]} \overline{S}(f, \pi)$ i oznaczamy $\overline{\int_a^b} f$

Podobnie definiujemy całkę dolną: $\underline{\int_a^b} f = \sup\limits_{\pi - \text{podziały } [a,b]} \underline{S}(f, \pi)$.

<u>Definicja</u>. Jeśli $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, to mówimy, że f jest całkowalna w sensie Riemanna ~~i pis~~ na $[a,b]$ i piszemy $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f$.

<u>Stwierdzenie</u>. Funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna $\Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \exists \pi : \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) < \varepsilon$.

<u>Dowód</u>. $(\Leftarrow)$.

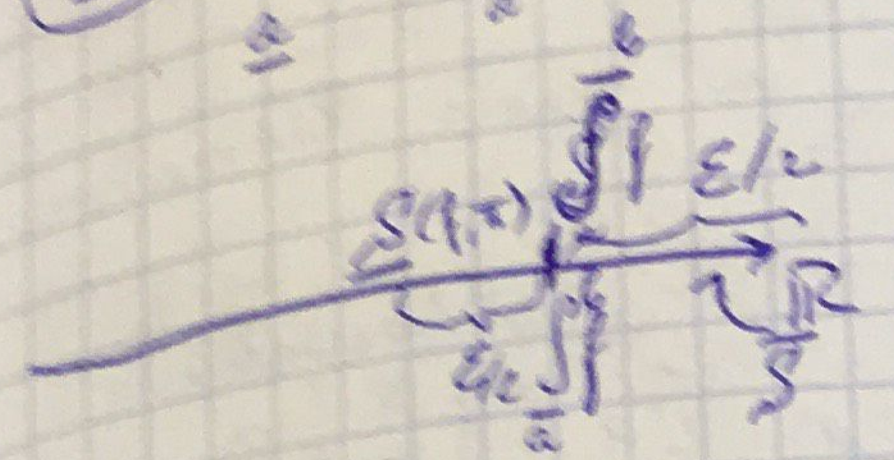
$$\overline{S}(f, \pi) \geq \overline{\int_a^b} f.$$

$$\underline{S}(f, \pi) \leq \underline{\int_a^b} f$$

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} \leq \overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \overset{\forall_{\varepsilon>0} \exists \pi}{\leq} \varepsilon . \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

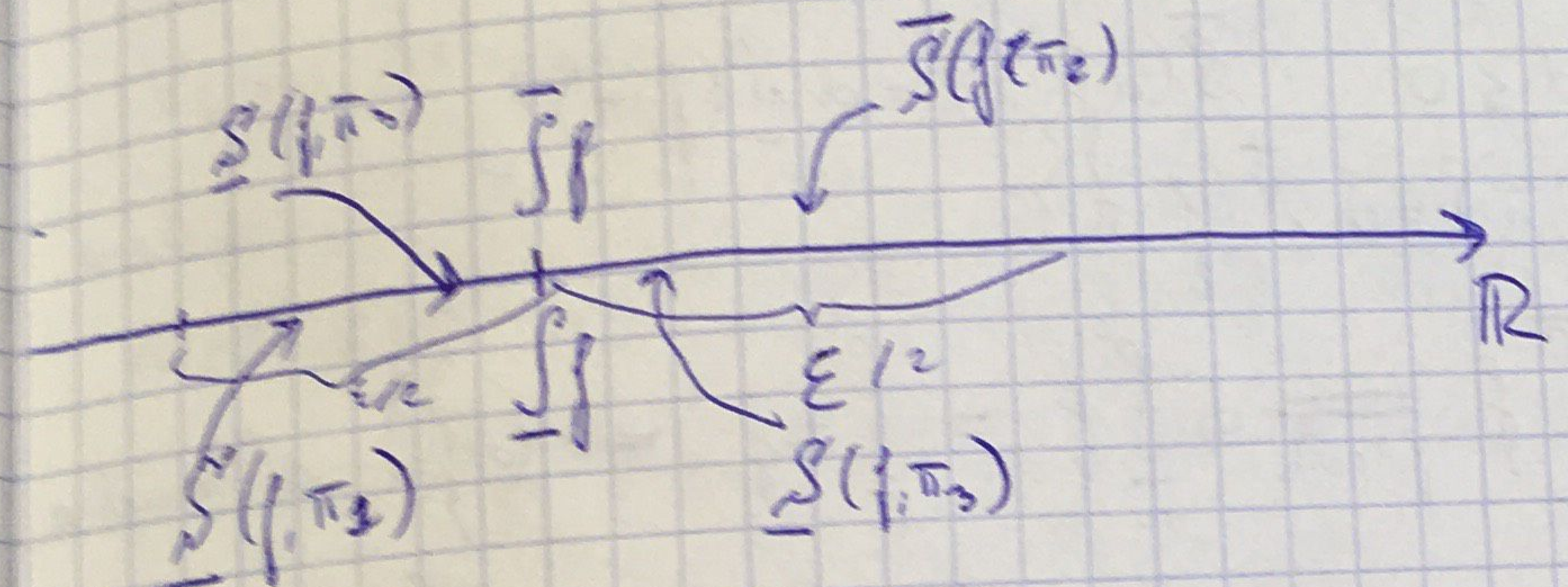
Czyli f jest całkowalna w sensie Riemana.

$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. $\forall \varepsilon>0\ \exists \pi_1 : \underline{\int_a^b} f \le \underline{S}(f,\pi_1) + \varepsilon/2$



Podobnie, $\forall \varepsilon>0\ \exists \pi_2\ \ \overline{\int_a^b} f + \varepsilon/2 \ge \overline{S}(f,\pi_2)$.

Niech π_3 będzie podziałem drobniejszym niż π_1 & π_2.



Wniosek (patrz rys.)

$$\overline{S}(f,\pi_3) - \underline{S}(f,\pi_3) < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Czyli istnieje podział π_3 jak w tezie ■.

Pytanie: Czy dodawanie/mnożenie f-cji całkowalnych daje f-cję całkowalną?

Przykład: Funkcja $[a,b] \ni x \longmapsto x \in [a,b]$,

$f(x) = x = id.$ — jest całkowalna na $[a,b]$.

Rozważmy podziały $\pi_n = \{a, a+\frac{b-a}{n}, a+2\frac{b-a}{n}, \dots, b\}$.

$$\overline{S}(f,\pi_n) = \sum_{i=1}^{n}\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{[t_i,t_{i+1}]}(f)\cdot(t_i - t_{i-1})$$

$$\underline{S}(f,\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)\cdot\left(\frac{b-a}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \inf_{[t_i,t_{i+1}]}(f)\cdot(t_{i+1}-t_i)$$

$$\overline{S}(f,\pi_n) - \underline{S}(f,\pi_n) = \left(a+\frac{n(b-a)}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) - a\frac{b-a}{n} = \frac{b(b-a)}{n} - \frac{a(b-a)}{n} =$$

$= \frac{(b-a)^2}{n} < \varepsilon$ dla dostatecznie dużego $n \in \mathbb{N}$.

Czyli $f(x) = x$ jest całkowalne w sensie Riemanna.

<u>Twierdzenie</u>. Jeśli $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ całkowalne oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to funkcja $\alpha f + \beta g : [a,b] \to \mathbb{R}$ – całkowalna oraz $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

<u>Dowód</u>. Dla $\alpha > 0$: $\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi)$

$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$.

Odwzorowanie liniowe

Dla $\alpha \leq 0$: $\overline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \underline{S}(f, \pi)$,

$\underline{S}(\alpha f, \pi) = \alpha \overline{S}(f, \pi)$.

$\alpha > 0$: $\overline{\int_a^b} \alpha f = \alpha \overline{\int_a^b} f \underset{f\text{-całk.}}{=\!=} \alpha \underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} \alpha f \Rightarrow (\alpha f)$ - całkowalna

oraz $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

Podobnie pokazujemy, że dla $\alpha < 0$ αf - całkowalna oraz $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

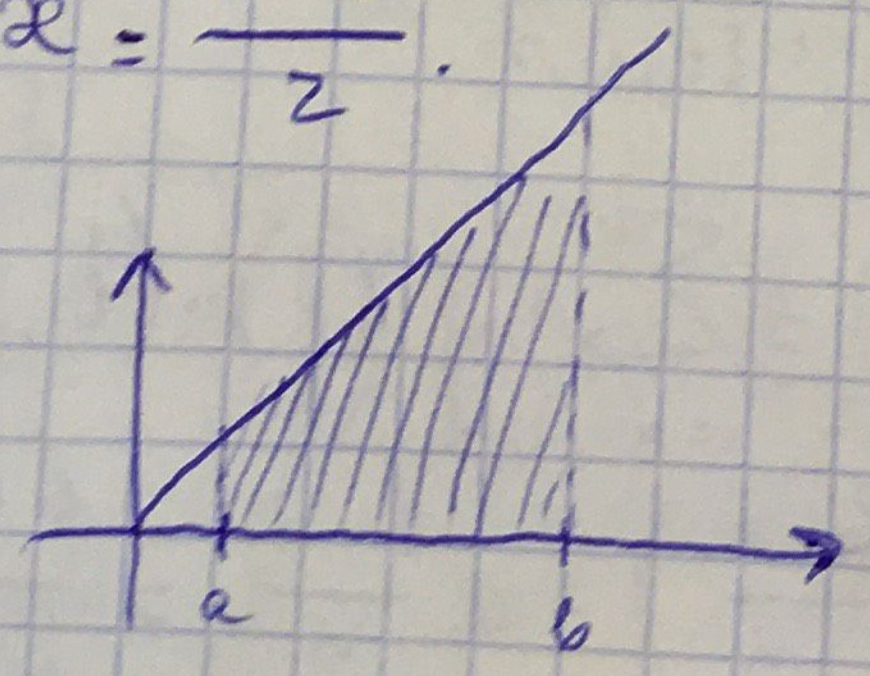
<u>Dla dodawania</u>. Wystarczy zatem pokazać, że jeśli $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całk, to $(h_1 + h_2) : [a,b] \to \mathbb{R}$ też.

(Ale to we wtorek)

W21 | <u>Notacja</u>: $\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$.

Wiemy, że funkcja $id_{[a,b]}(x) = x \ \forall x \in [a,b]$ jest całkowalna

$\int_a^b x = \frac{b^2 - a^2}{2}$.

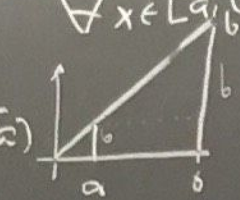


$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$

Wiemy, że funkcja $id_{[a,b]}(x) = x$ jest całkowalna

$\int_a^b x = \frac{b^2-a^2}{2} = F(b) - F(a)$

$\forall x \in [a,b]$



Funkcja pierwotna $f: I \to \mathbb{R}$ to taka funkcja
$\underbrace{I}_{\text{odcinek otwarty}}$

$F: I \to \mathbb{R}$, że $F' = f$

Na przykład $F = \frac{x^2}{2} + 1$ $\quad f = x$.

Dowód cd

f, g - całkowalne na $[a,b]$

$\underset{\text{skalary}}{\alpha} f + \underset{\text{skalary}}{\beta} g$ - całkowalna —″—

Do wykonania: suma funkcji całkowalnych jest całkowalna.

oraz $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

$\forall \varepsilon\ \exists \pi$ - podział $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$ - Kryterium.

Niech $\varepsilon > 0$ oraz π_1, π_2 - podziały $[a,b]$ t. że.

$\overline{S}(f,\pi_1) - \underline{S}(f,\pi_1) < \varepsilon$ & $\overline{S}(g,\pi_2) - \underline{S}(g,\pi_2) < \varepsilon$.

Niech π_3 będzie drobniejszy niż π_1 oraz π_2.

$= (t_0 = a, t_1, \dots, t_n = b)$

$\sup_{x \in [t_{i-1}, t_i]} (f+g) \leq \sup f + \sup g$

Dowód $\forall x \in [t_{i-1}, t_i]$ $\quad f(x) \leq \sup f \quad g(x) \leq \sup g$

Suma nierówności $\forall x \in [t_{i-1}, t_i]$ $\quad f(x) + g(x) \leq \sup f + \sup g$

Zatem $\sup (f+g) \leq \sup f + \sup g$

Podobnie $\inf (f+g) \geq \inf f + \inf g$. $\quad a \ \ t_1 \ \dots \ t_{n-1} \ \ b$

$$\overline{S}(f+g,\pi_3) - \underline{S}(f+g,\pi_3) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{[t_{i-1},t_i]} (f+g) - \inf_{[t_{i-1},t_i]} (f+g) \right)(t_i - t_{i-1})$$

$$\leq \sum \left(\sup (f) + \sup g - \inf f - \inf g \right)(t_i - t_{i-1})$$

$$\overline{S}(f,\pi_3) - \underline{S}(f,\pi_3) + \overline{S}(g,\pi_3) - \underline{S}(g,\pi_3) \leq 2\varepsilon.$$

Czyli $f+g$ jest całkowalna.

Jak pokazać, że $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$? Wystarczy $\int_a^b (f+g) \leq \int_a^b f + \int_a^b g$

i skorzystać z równości $\int_a^b \alpha h = \alpha \int_a^b h$.

$\forall_{\varepsilon > 0}$ $\int_a^b (f+g) \leq \overline{S}(f+g,\pi_3) \leq \overline{S}(f,\pi_3) + \overline{S}(g,\pi_3) \leq$

$$\overline{S}(f,\pi_3) + \underbrace{\int_a^b f - \underline{S}(f,\pi_3)}_{\leq 0} + \overline{S}(g,\pi_3) + \underbrace{\int_a^b g - \underline{S}(g,\pi_3)}_{\leq 0}$$

$$\leq \int_a^b f + \int_a^b g + 2\varepsilon \Rightarrow \int_a^b f+g \leq \int_a^b f + \int_a^b g$$

Twierdzenie

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną t. że $f([a,b]) \subset [c,d]$

Niech $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. $[a,b] \xrightarrow{f} [c,d] \xrightarrow{g}$

Wówczas $g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną.

Wnioski z twierdzenia:

① g - dowolna ciągła na $[c,d]$ a $f = id_{[c,d]}$ - całkowalna.

Wówczas $\underbrace{g \circ id_{[c,d]}}_{= g}(x) = g(x)$ zatem g - całkowalna

② $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalne.

$\frac{f_1+f_2}{2}$, $\frac{f_1-f_2}{2}$ - całkowalne.

Niech $g(x) = x^2 \Rightarrow \left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)^2 = f_1 \cdot f_2$ - jest funkcją całkowalną.

Dowód twierdzenia:

g jest jednostajnie ciągła $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \underset{\hat{\varepsilon}}{\delta} \; \forall_{s,t \in [c,d]} \left(|s-t| < \delta \Rightarrow |g(s) - g(t)| < \varepsilon \right)$ (**)

f jest całkowalna $\Rightarrow \exists \, \Pi$ odcinka $[a,b]$: $\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \delta^2$.

Cel pokazać że Π jest „dobre" dla $g \circ f$

$\Pi = (t_0, \dots, t_n)$

$M_i = \sup\limits_{[t_{i-1},t_i]} f$, $m_i = \inf\limits_{[t_{i-1},t_i]} f$ $\quad i \in \{1, \dots, n\}$.

$M_i' = \sup\limits_{[t_{i-1},t_i]} g \circ f < \sup g < \infty$, $m_i' = \inf\limits_{[t_{i-1},t_i]} g \circ f > \inf g$.

Klasyfikacja indeksów i: $\{1, \dots, n\} = A \sqcup B$ (rozłączna suma)

gdzie $i \in A \Leftrightarrow M_i - m_i < \delta \Leftarrow \{\forall x,y \in [t_{i-1}, t_i]$ mamy $|f(x) - f(y)| < \delta\}$ (*)

$i \in B \Leftrightarrow M_i - m_i \geq \delta$

Zauważmy, że $\delta \cdot \sum\limits_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) \leq \sum\limits_{i \in B} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \delta^2$

Widzimy, że $\sum\limits_{i \in B} (t_i - t_{i-1}) < \delta < \varepsilon$.

$$\overline{S}(g \circ f, \Pi) - \underline{S}(g \circ f, \Pi) = \sum_{i \in A} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) + \underbrace{\sum_{i \in B} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1})}_{2 \sup |g| \cdot \varepsilon}$$

$i \in A$, $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ (*), (**) $\Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(y)| = |g(\underset{s}{f(x)}) - g(\underset{t}{f(y)})| = |g(s) - g(t)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ w takim $M_i' - m_i' < \varepsilon$ i $\sum\limits_{i \in A} (M_i' - m_i')(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon \sum\limits_{i \in A} (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon(b-a)$

W końcu widzimy, że

$\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon \cdot (b - a + 2 \sup |g|) = \hat{\varepsilon}$ ∎

$M_i = \sup_{[t_{i-1},t_i]} f$, $m_i = \inf_{[t_{i-1},t_i]} f$ $\quad i \in \{1,\dots,n\}$.

$M_i' = \sup_{[t_{i-1},t_i]} g\circ f < \sup g < \infty$, $\quad m_i' = \inf_{[t_{i-1},t_i]} g\circ f > \inf g$.

Klasyfikacja indeksów i: $\{1,\dots,n\} = A \overset{\text{rozłączna suma}}{\sqcup} B$

gdzie $i\in A \iff M_i - m_i < \delta \Leftarrow \{\forall\, x,y \in [t_{i-1},t_i]$ mamy $\overset{(*)}{|f(x)-f(y)|<\delta}\}$

$\quad\quad i \in B \iff M_i - m_i \geq \delta$

Zauważmy, że $\delta\cdot\sum_{i\in B}(t_i-t_{i-1}) \leq \sum_{i\in B}(M_i-m_i)(t_i-t_{i-1}) \leq \overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi) \leq \delta^2$

Widzimy, że $\sum_{i\in B}(t_i - t_{i-1}) < \delta < \varepsilon$.

$$\overline{S}(g\circ f,\Pi) - \underline{S}(g\circ f,\Pi) = \sum_{i\in A}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1}) + \overbrace{\sum_{i\in B}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1})}^{2\sup|g|\cdot\varepsilon}$$

$i\in A$ $\quad x,y\in[t_{i-1},t_i]$ $(*),(**) \Rightarrow |g\circ f(x) - g\circ f(y)| = |g(\underset{s}{f(x)}) - g(\underset{t}{f(y)})| = |g(s)-g(t)| < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ w takim $M_i'-m_i' < \varepsilon$ i $\sum_{i\in A}(M_i'-m_i')(t_i-t_{i-1}) < \varepsilon \sum_{i\in A}(t_i-t_{i-1}) < \varepsilon(b-a)$

W końcu widzimy, że
$\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon\cdot(b-a+2\sup|g|) = \tilde{\varepsilon}$ $\boxed{}$

Definicje:

Niech $\Pi = (t_0,t_1,\dots,t_n)$ będzie podziałem $[a,b]$.

Mówimy $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ jest wypunktowaniem Π jeśli

$\forall i\in\{1,\dots,n\}\quad \xi_i\in[t_{i-1},t_i]$.

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - ograniczona. Wypunktowaną sumą f nazywamy wielkość $S(f,\Pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$

Widzimy, że $\underline{S}(f,\Pi) \leq S(f,\Pi,\xi) \leq \overline{S}(f,\Pi)$

Uwaga: Zauważmy, że dla $[c,d]\subset[a,b]$ oraz $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ - całkowalnej:

$f|_{[c,d]}:[c,d]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna.

Dlaczego? Π - podział $[a,b]$ $\quad \overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)<\varepsilon$.

Niech $\Pi|_{[c,d]}$ - podział $[c,d]$ powstający z podziału Π przez obcięcie.

Wówczas $\overline{S}(f|_{[c,d]},\Pi|_{[c,d]}) - \underline{S}(f|_{[c,d]},\Pi|_{[c,d]}) < \varepsilon$

Uzupełnienia
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$; $f([a,b]) \subset [c,d] \ni x \longmapsto g(x) \in \mathbb{R}$
całkowalne (ograniczone) ; ciągła.

$g \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$
całkowalne

- Biorąc $g(x) = |x|$ widzimy, że jeśli f - całkowalna to $g \circ f = |f|$ też jest całkowalna.

.. Zauważmy jeśli f - całkowalna $[a,b]$ oraz $f(x) \geq 0$ dla $x \in [a,b]$ to $\int_a^b f \geq 0$.

$$\int_a^b f = \int_a^x f + \int_x^b f$$

W szczególności jeśli $f_1 \leq f_2$ to $\int_a^b f_1 \leq \int_a^b f_2$
całkowalne na $[a,b]$

Rzeczywiście. $f_2 - f_1 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \int_a^b (f_2 - f_1) = \int_a^b f_2 - \int_a^b f_1$.

... Zauważmy że $f \leq |f| \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$;
$-f \leq |f| \Rightarrow -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ Stąd $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

$[c,d] \subset [a,b]$ & $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalne to $f|_{[c,d]}$ jest całkowalna na $[c,d]$
W szczególności $\forall x \in [a,b]$ mogę zdefiniować $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$.
co zadaje funkcję $[a,b] \ni x \longmapsto F(x) \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie Jeśli f - całkowalne na $[a,b]$ i $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ j.w. to

1. F jest funkcją ciągłą. $[a,b]$
2. jeśli f jest ciągła w $x_0 \in]a,b[$ to F jest różniczkowalne w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$

Dowód ① $a \leq x < y \leq b$, Niech $M > 0$ będzie ograniczeniem górnym dla $|f|$.

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_a^y f - \int_a^x f\right| = \left|\int_x^y f\right| \leq \int_x^y |f| \leq M \cdot \int_x^y 1 = M(y-x) = M|y-x|$$

② Niech f - ciągła w x_0. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta$: $|h| < \delta \Rightarrow |f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$

$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x_0+h) \leq f(x_0) + \varepsilon \rightsquigarrow |s - x_0| < \delta \Rightarrow -\varepsilon < f(s) - f(x_0) < \varepsilon$

Zał. że $0 < h < \delta$. Iloraz różnicowy F w x_0 „$f(x_0)$.

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(s)\,ds - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \left(f(s) - f(x_0)\right) ds$$

Zauważmy $-\varepsilon \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \left(f(s) - f(x_0)\right) \leq \varepsilon$. co pokazuje że $\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$

Wniosek.
Jeśli $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ – ciągła to F jest różniczkowalna na $]a,b[$ ciągła na $[a,b]$ oraz $F'=f$ na $]a,b[$

$$\int_a^b f = F(b) - \underset{0}{\underset{\parallel}{F(a)}}$$

<u>Przykład</u> $f=x^4$, $\int_0^1 x^4 = ?$ Niech $G:[0,1]\to\mathbb{R}$

gdzie $G(x)=\frac{x^5}{5}$ – ciągła na $[0,1]$, różniczkowalna na $]0,1[$

$G'=f$ na $[0,1]$. Podobnie $F(x)=\int_a^x s^4\,ds$ ma te same wł. co G.

$(G-F)'=0$. Czyli $G-F=\text{const}$ na $]0,1[$.

z ciągłości $G-F=\text{const}$ na $[0,1]$.

$G(0)-F(0)=\text{const}$. Widzimy, że $G=F$ na $[0,1]$.

$\underset{0}{\underset{\parallel}{G(0)}}$, $\underset{0}{\underset{\parallel}{F(0)}}$, i w końcu $\int_0^1 s^4\,ds = F(1)-F(0) = G(1)-G(0) = \frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}$

Definicja: Niech $f: I\to\mathbb{R}$ (odcinek otwarty). Mówimy, że $F: I\to\mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną f jeśli F jest różniczkowalna na I oraz $F'=f$.

Uwaga
Niech $f: I\to\mathbb{R}$ ciągła oraz $x_0\in I$. Wówczas
$$F(x)=\begin{cases}\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds & x\geq x_0\\ -\int_{x}^{x_0} f(s)\,ds & x\leq x_0\end{cases}$$
jest funkcją pierwotną funkcji f.

Notacja jeśli $x_0 > x$ to $-\int_x^{x_0} f(s)\,ds \overset{\text{ozn}}{=} \int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$

w tej notacji $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds$.

Zauważmy jeśli F_1 i F_2 są funkcjami pierwotnymi f to $F_1-F_2=\text{const}$

Wniosek G – pierwotna dla f to $\int_{x_0}^{x} f(s)\,ds = F(x) = G(x)-G(x_0)$.

$G(x)-F(x)=\text{const}=G(x_0)-F(x_0)=G(x_0)$

TW (ZASADNICZYM TW RACH RÓŻNICZKOWEGO i CAŁKOWEGO)
Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną, $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ – ciągła, różniczkowalna na $]a,b[$ i $H'(x)=f(x)$ dla $x\in\,]a,b[$. Wówczas $\int_a^b f(s)\,ds = H(b)-H(a)$

<u>Dowód</u>: Niech $\varepsilon>0$ i $\Pi=(t_0,t_1,\dots,t_n)$ będzie podziałem $[a,b]$ t. że $\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)<\varepsilon$.

Uwaga

Niech $f: I \to \mathbb{R}$ ciągła oraz $x_0 \in I$. Wówczas $F(x) = \begin{cases} \int_{x_0}^{x} f(s)ds & x \geq x_0 \\ -\int_{x}^{x_0} f(s)ds & x \leq x_0 \end{cases}$

jest funkcją pierwotną funkcji f.

Notacja jeśli $x_0 > x$ to $-\int_{x}^{x_0} f(s)ds \overset{ozn}{=} \int_{x_0}^{x} f(s)ds$

w tej notacji $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$

Zauważmy jeśli F_1 i F_2 są f-cjami pierwotnymi f to $F_1 - F_2 = const$

Wniosek G - pierwotna dla f to $\int_{x_0}^{x} f(s)ds = F(x) = G(x) - G(x_0)$.

$$G(x) - F(x) = const = G(x_0) - F(x_0) = G(x_0)$$

Tw (ZASADNICZY TW RACH RÓŻNICZKOWEGO i CAŁKOWEGO)

Niech $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła, różniczkowalna na $]a,b[$ i $F'(x) = f(x)$

dla $x \in]a,b[$. Wówczas $\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$ i $\pi = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ będzie podziałem $[a,b]$

t że $\overline{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \varepsilon$.

Dla dowolnego wypunktowania $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ podziału π

$$\underline{S} \leq S(f,\pi,\xi) \leq \overline{S}$$
$$\underline{S} \leq \int_a^b f \leq \overline{S} \Rightarrow \left|\int_a^b f - S(f,\pi,\xi)\right| < \varepsilon$$

Inteligentny dobór wypunktowania; (wypunktowanie Lagrange'a)

Tw Lagrange'a: $\xi_i \in]t_{i-1}, t_i[$ $\quad \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = F'(\xi_i) = f(\xi_i)$.

Wówczas $S(f,\pi,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (F(t_i) - F(t_{i-1}))$

$$= F(t_1) - F(t_0) + F(t_2) - F(t_1) + \dots + F(t_n) - F(t_{n-1}) = -F(t_0) + F(t_n)$$
$$= F(b) - F(a)$$

Czyli $\forall_{\varepsilon > 0} \left|\int_a^b f - (F(b) - F(a))\right| < \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$.

$\square$

Przykłady $\int_1^2 \frac{1}{s} ds = \begin{cases} F(x) = \log(x) & \text{na } [1,2] \\ F'(x) = \frac{1}{x} & \text{na }]1,2[\end{cases} = \log(2) - \log(1) = \log 2$.

Logarytm można zdefiniować jako $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{s} ds$ dla $x > 0$.

Dlaczego gdy $x, y > 0$ to $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log y$?