Wykład 23.12 Szeregi Fouriera cz. II

Szeregi Fouriera / całkowalność z kwadratem.

Niech $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będą ciągłe i 2π-okres.
Iloczyn skalarny $\langle f | g \rangle_{L^2}$ definiujemy wzorem

$$\langle f | g \rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

Zauważmy, że $\|f\|_{L^2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

Przykład Niech $e_n(x) = e^{inx}$ $n \in \mathbb{Z}$

$e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ - ciągła & 2π okresowa

Obliczmy

$$\langle e_n | e_m \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\,dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 1 & n = m \end{cases}$$

Współczynniki szeregu Fouriera $\hat{f}(n)$ funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ są dane wz:

$$\hat{f} = \langle e_n | f \rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)\,dx$$

H - p-ń funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ j.w. z iloczynem skalarnym.

V_N = rozpięte przez $\underbrace{\{e_{-N}, e_{-N+1}, \dots, e_{N-1}, e_N\}}$

układ o.n.

Rzut ortogonalny $P_N : H \to H$ na V_N

$$P_N f = \langle e_{-N} | f \rangle e_{-N} + \ldots + \langle e_N | f \rangle e_N .$$

$$= \underbrace{\hat{f}(-N) e_{-N} + \ldots + \hat{f}(N) e_N}_{\text{n-ta częściowa suma szeregu Fouriera}}$$

$$S_N(f) = P_N f.$$

W szczególności

$$\| P_N f \|_{L^2}^2 = \| \hat{f}(-N) e_{-N} + \ldots + \hat{f}(N) e_N \|^2 = \sum_{n=-N}^{n=+N} | \hat{f}(n) |^2$$

Oraz

$$\|f\|^2 = \|\underbrace{f - P_N f}_{} \perp \underbrace{P_N f}_{}\|^2 = \|f - P_N f\|^2 +$$

$$+ \|P_N f\|^2 = \|f - S_N f\|^2 + \sum_{n=-N}^{n=+N} |\hat{f}(n)|^2.$$

Rozważmy dowolny wielomian trygonometryczny $t = \sum_{n=-N}^{n=N} \alpha_n e_n$. Wówczas

$$\|f - t\|_{L^2}^2 = \|\underbrace{f - S_N f}_{} \perp \underbrace{S_N f - t}_{}\|^2 =$$

to wynika z $\langle e_n | f - S_N f\rangle = \hat{f}(n) - \hat{f}(n) = 0$

$$= \|f - S_N f\|^2 + \|S_N - t\|^2 \overset{(*)}{\geqslant} \|f - S_N f\|^2_{L^2}.$$

Twierdzenie:

Dla każdej funkcji ciągłej 2π okresowej mamy

$$\lim_{N \to \infty} \|f - S_N f\|_{L^2} = 0 \quad \&$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

Dowód Przypadek Łatwy: f - klasy C^2.

Wówczas jak wykazaliśmy na poprzednim wykładzie

$S_N f \to f$ jednostajnie:

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |f(x) - S_N f(x)| \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

W szczególności:

$$\|S_N f - f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{[-\pi, \pi]} |f(x) - S_N f(x)|^2 \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

Ponadto

$$\|f\|^2 = \lim_{N\to\infty}\left(\|f - s_N(x)\|^2 + \|s_N(x)\|^2\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\|s_N(x)\|^2 = \sum_{n=-N}^{n=+N}|\hat{f}(n)|^2.$$

Jak pozbyć się warunku $f \in C^2$?

Można wykazać, że funkcję ciągłą można przybliżyć jednostajnie funkcją C^2 a funkcje klasy C^2 można przybliżyć jednostajnie wielomianem trygonometrycznym.

(a) $\exists\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ - 2π okresowe C^2

$$\sup_{[-\pi,\pi]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

(b) Wiemy, że $S_N g \to g$ jednostajnie

$$\|f - S_N f\|_{L^2} \overset{(*)}{\leqslant} \|f - S_N g\|_{L^2} \leqslant$$

$$\|f-g\|_{L^2} + \|g - S_N g\|_{L^2} \leqslant \varepsilon + \varepsilon \quad \text{dla}$$

dostatecznie dużych N.

Zatem $\|f - S_N f\|_{L^2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Uwaga: Podobne techniki pozwalają wykazać, że jeśli $f: [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna to

$$\lim_{N\to\infty} \|f - S_N f\|_{L^2} = 0 \quad \& \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2.$$

Przykład

Niech $f(x) = x \quad x \in [-\pi, \pi]$.

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} \cdot x\, dx \overset{n\neq 0}{=}$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(x \cdot e^{-inx} \cdot \frac{1}{-in}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{-in}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-inx} dx}_{= 0} \right) =$$

$$= \frac{i2\pi}{2\pi n} \cdot (-1)^n = \frac{i(-1)^n}{n}$$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

W szczególności

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} |\hat{f}(n)|^2 = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

, dostajemy

słynny wzór

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$