Szeregi Fouriera

Zacznijmy od następującej obserwacji:

Stwierdzenie

Jeśli funkcja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest sumą jednostajnie zbieżnego szeregu $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$, $a_k \in \mathbb{C}$

to $a_l = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ilt} dt$. (*)

Dowód: Wstawiamy $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$ do całki (*) i całkujemy "wyraz po wyrazie".

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt} e^{-ilt} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t} dt =$$

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 2\pi & m = 0 \end{cases} \right\} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot a_l = a_l \quad \blacksquare$$

Definicja Jeśli $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna to liczbę $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ nazywamy n-tym współczynnikiem Fouriera f i oznaczamy $\hat{f}(n)$.

Szereg Fouriera funkcji f to szereg postaci $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$. Jego N-ta suma częściowa w punkcie x to suma $2N+1$ składników $\sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n) e^{inx}$ którą oznaczamy $(S_N f)(x)$.

Uwaga nie wiadomo dla jakich $x \in [-\pi, \pi]$ ② szereg jest zbieżny. Jeśli nawet dla pewnego x_0 szereg Fouriera $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$ jest zbiezny to nie wiadomo czy jego wartość jest równa $f(x)$.

Podsumowując każdej funkcji $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ przypisujemy ciąg liczb zespolonych $(\hat{f}(n))_{n \in \mathbb{Z}}$

Ponadto $\widehat{\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2}(n) = \alpha_1 \hat{f}_1(n) + \alpha_2 \hat{f}_2(n)$.

Zauważmy też, że $|\hat{f}(n)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$

Udowodnimy teraz

Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a

Jeśli $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ jest całkowalna w sensie Riemanna, to $\hat{f}(n) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$.

Dowód: Rozważmy $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ i sprawdźmy teza dla $\chi_{[a,b]}: [-\pi, \pi] \to \{0, 1\}$ $\chi_{[a,b]}(t) = \begin{cases} 1 & t \in [a,b] \\ 0 & t \notin [a,b] \end{cases}$

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi i n} \left(e^{-ina} - e^{-inb} \right) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0.$$

Zatem jeśli f jest skończoną kombinacją funkcji $\chi_{[a_j, b_j]}$ to $\hat{f}(n) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$

Obserwacje: jeśli $f, f_k: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ są całkowalne w s. Riemanna oraz

① Dla każdego k: $\hat{f}_k(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

② $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - f_k(t)| \xrightarrow[k \to \infty]{} 0$

to także $\hat{f}(n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

③

Rzeczywiście, ustalmy $\varepsilon>0$

$$\hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f_j(t))e^{-int}+\hat{f_j}(n) \leftarrow \forall j\in\mathbb{Z}$$

Zatem $|\hat{f}(n)|\leq|\hat{f_j}(n)|+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f_j(t)|dt$ (*)

Niech j_0 : $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-f_{j_0}(t)|dt\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Istnieje N_0 : dla $|n|\geqslant N_0$ $|\hat{f_{j_0}}(n)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$

W szczególności $|\hat{f}(n)|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ gdy

$|n|\geqslant N$.

Dowód będzie zakończony jeśli udowodnimy, że dla funkcji całkowalnej $f[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ i każdego $\varepsilon>0$ istnieje funkcje "schodkowe"

$g=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\chi_{[a_k,b_k]}$ t. że $\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|dt\leq\varepsilon$.

W tym celu zauważmy, że jeśli $\Pi=\{D_1,\dots,D_K\}$ jest podziałem t. że

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt-\frac{\varepsilon}{2}\leq\underline{S}(\Pi,f)\leq\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt\leq\overline{S}(\Pi,f)\leq\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt+\frac{\varepsilon}{2}$$

Ustalmy $t_k\in D_k$ i niech $\alpha_k=f(t_k)$.

Zdefiniujmy $g=\sum_{k=1}^{K}\alpha_k\chi_{D_k}$. Zauważmy, że dla $t\in D_k$ zachodzi $|f(t)-g(t)|=|f(t)-\alpha_k|=$
$=|f(t)-f(t_k)|\leq\sup_{D_k}f-\inf_{D_k}f$ zatem

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f-g|dt=\sum_{k=1}^{K}\int_{D_k}|f(t)-g(t)|dt\leq\sum_{k=1}^{K}m(D_k)\left(\sup_{D_k}f-\inf_{D_k}f\right)$$

$=\overline{S}(\Pi,f)-\underline{S}(\Pi,f)\leq\varepsilon$. ☒

Dla jakich $t\in[-\pi,\pi]$ zachodzi równość $f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$. Zauważmy, że

$$\sum_{n=-N}^{n=N}\hat{f}(n)e^{int} = \sum_{-N}^{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)e^{-ins}\,ds \text{ *exp(int)=}$$

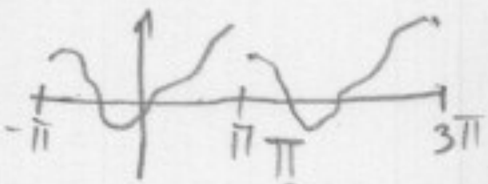
$$\overset{(*)}{=}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\sum_{-N}^{+N} e^{in(t-s)}\right)ds$$

suma ciągu geometrycznego

Zdefiniujmy $D_N(x)=\sum_{n=-N}^{+N} e^{inx} = \begin{cases}\dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} & x\neq 2k\pi\\ 2N+1 & x=2k\pi\end{cases}$

Wtedy $(*)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(t-s)\,ds$.

Uwaga od tej pory funkcję $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ będziemy utożsamiać z funkcją 2π-okresową na $\mathbb{R}$.



itd.

Wówczas $(*)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)D_N(s)\,ds$ ← zamiana zmiennych $s\rightsquigarrow t-s$.

Używając notacji poprzednio wprowadzonej mamy $(S_Nf)(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(t-s)\,ds$

Zauważmy przy okazji, że $\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) = \sum_{-N}^{+N}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}dt = 2\pi$.

Twierdzenie (kryterium Diniego)

Jeśli $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ jest funkcją 2π-okresową całkowalną na $[-\pi,\pi]$, zaś $t_0\in[-\pi,\pi]$ jest takim punktem, że $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t_0-t)-f(t_0)}{t}\right|dt<\infty$ to $(S_Nf)(t_0)\xrightarrow[N\to\infty]{} f(t_0)$.

$$\overset{''}{\sum_{-N}^{+N}}\hat{f}(n)e^{int_0}$$

Dowód

$$f(t_0) - (S_N f)(t_0) = f(t_0) \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)}_{=1} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0 - s) D_N(s)\,ds$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t_0) - f(t_0 - s) \cdot \frac{\sin(N+\frac{1}{2})\cdot s}{\sin(\frac{s}{2})}\,ds =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(t_0) - f(t_0 - s)}{s}\right)\cdot \frac{s}{\sin\frac{s}{2}} \cdot \sin\left(N+\tfrac{1}{2}\right)\cdot s.$$

Zauważmy, że funkcja $G_{t_0}(s) = \frac{f(t_0) - f(t_0 - s)}{s} \cdot \frac{s}{\sin\frac{s}{2}}$ spełnia $\int_{-\pi}^{\pi} |G_{t_0}(s)|\,ds < \infty$ ponadto G_{t_0} ma osobliwości w $s = 0$. Zauważmy też, że dla $\varepsilon > 0$ istnieje δ t. że $\int_{-\delta}^{\delta} |G_{t_0}(s)|\,ds < \varepsilon$.

Ponadto z twierdzenia Riemanna-Lebesguea zachodzi $\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} G_{t_0}(s)\sin(N+\frac{1}{2})s \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$.

Z tych obserwacji wynika, że

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_{t_0}(s)\sin\left(\left(N+\tfrac{1}{2}\right)s\right)ds \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \blacksquare$$

← Rzeczywiście, wystarczy całkowanie po $[-\pi,\pi]$ podzielić na całkowanie po $[-\delta,\delta]$ oraz $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$.

Uwaga: Założenia powyższego twierdzenia są spełnione w każdym punkcie $x_0 \in [-\pi,\pi]$ gdy np.

(i) f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L:
$|f(x) - f(y)| \le L|x-y|$ dla $x, y \in \mathbb{R}$:

Rzeczywiście, wówczas całka

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t_0-t)-f(t_0)}{t}\right|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} L = 2\pi L < \infty.$$

(iii) Ogólniej wystarczy, że $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|^\alpha$

dla pewnego $\alpha \in (0,1]$.

Rzeczywiście $\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(t_0-t)-f(t_0)}{t}\right|dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} M\frac{|t|^\alpha}{|t|}\,dt = M\int_{-\pi}^{\pi}|t|^{\alpha-1} =$

$2\cdot\frac{M}{\alpha}\pi^\alpha < \infty.$

Przykład/uwaga.

Jeśli $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ to szereg Fouriera

$\sum_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)e^{int}$ ($= \cos nt + i\sin(nt)$) zastępuje się często rozwinięciem w $\sin(nt)$ i $\cos(nt)$

(konwencja) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt)$

gdzie $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$
$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$ } ćwiczenie

Niech $f(t) = \begin{cases} 0 & t\in[-\pi,0] \\ t & t\in[0,\pi].\end{cases}$

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi a_n = \int_0^{\pi} t\cdot\cos(nt)dt \overset{\text{p. części}}{=} \frac{t\sin nt}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nt)dt = \frac{1}{n^2}\cos nt\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

Podobnie całkując przez części dostajemy
$$\pi b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Zauważmy, że dla $t_0 \in (-\pi, \pi)$ można stosować kryterium Diniego. Zatem
$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos(5x) + \dots\right) -$$
$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \dots\right)$$
Wstawiając $x = 0$ dostajemy
$$0 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) \text{ a stąd}$$
$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$
Wstawiając $t_0 = \frac{\pi}{2}$ mamy $\cos(2n+1)t_0 = 0 = \sin(2nt_0)$

Zatem $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$

Pytanie: przy jakich warunkach (na f) szereg Fouriera zbiega jednostajnie do f.

Przypuśćmy, że $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest 2π-okresowe i klasy C^1. Zauważmy, że $\frac{f(t_0 - t) - f(t_0)}{t}$ jest ciągła w $t = 0$ (przedłuża się do funkcji ciągłej)

Z kryterium Diniego

$f(t) = \lim_{N\to\infty} (S_N f)(t)$ dla wszystkich $t \in [-\pi,\pi]$

Okazuje się, że szereg $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$ jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny gdy f jest klasy $\mathcal{C}^2$.

Stwierdzenie

Jeśli $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ jest 2π okresowe to

$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$

Dowód: $\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-int} dt \overset{\text{p. części}}{=}$

$= \underbrace{f(t)e^{-int}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{0 \text{ - okresowość}} + \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, in e^{-int} dt = in\hat{f}(n)$

<u>Wniosek</u>: Jeśli $f \in \mathcal{C}^2$ to istnieje stała c t. że $|\hat{f}(n)| \le \frac{c}{n^2}$ dla $n \neq 0$.

D: $\hat{f}(n) = \frac{1}{in}\widehat{f'}(n) = -\frac{1}{n^2}\widehat{f''}(n)$

$|\widehat{f''}(n)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt = C.$

W szczególności jeśli $f \in \mathcal{C}^2$ to

$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$ i z kryterium Weierstrassa szereg Fouriera jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny.