$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(1) - \operatorname{arctg}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$\int_0^1 \operatorname{arctg}(x)\,dx = ?$ CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI

— " — " — PODSTAWIENIE.

Z.T.R.R.i C.

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalna

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła, różniczkowalna na $]a,b[$

oraz $F' = f$ na $]a,b[$

Wówczas $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

TWIERDZENIE (CAŁKOWANIE PRZEZ CZĘŚCI).

$F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągłe i różniczkowalne na $]a,b[$

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalne i $F' = f$, $G' = g$ na $]a,b[$.

Wówczas $\int_a^b f \cdot G = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F g$.

Dowód: Rozważmy $F \cdot G : [a,b] \to \mathbb{R}$; $(F \cdot G)' = f \cdot G + F \cdot g$ na $]a,b[$

Z Z.T.R.R.i C. $\leadsto$ $\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = F(b)G(b) - F(a) \cdot G(a)$ $\boxtimes$

Przykład

$$\int_0^1 1 \operatorname{arctg}(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} F(x) = \operatorname{arctg}(x), & G(x) = x \\ f(x) = \frac{1}{1+x^2} & g(x) = 1 \end{array} \right\} = \underbrace{FG(1)}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{FG(0)}_{0} - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^2} \overset{\text{TW. O CAŁK. PRZEZ PODST.}}{=} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$

$a = 0 \quad b = 1$

$\phi(x) = x^2 \quad c = a^2 = 0 \quad d = b^2 = 1$

$\varphi(x) = \phi'(x) = 2x \quad f(y) = \frac{1}{1+y}$

$f(\phi(x)) = \frac{1}{1+x^2}$

$\int_0^1 f(\phi(x))\,\phi'(x)\,dx = \int_c^d \frac{dy}{1+y} = \log(1+y)\Big|_0^1 = \log(2)$

Twierdzenie (O całkowaniu przez podstawienie).

Niech $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą różniczkowalną na $]a,b[$

i $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ — " — " — " — i $\phi' = \varphi$ na $]a,b[$

Niech $c = \phi(a)$, $d = \phi(b)$ i załóżmy, że $c < d$.

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła.

Wówczas $\int_a^b f(\phi(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy$.

$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,dx$

Dowód: $F(t) := \int_c^t f(y)\,dy$. Wiadomo, że

F - ciągła oraz $F' = f$ na $]c,d[$.

Rozważmy funkcję $F \circ \phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła oraz

$(F \circ \phi)'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)$. Z Z.T.R.R.i C. $\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,dx =$

$(F \circ \phi)(b) - (F \circ \phi)(a) = F(d) - F(c) = \int_c^d f(y)\,dy$ $\boxtimes$

$$\int 1\cdot \operatorname{arctg}(x)\,dx = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{1+x^2} = x\operatorname{arctg}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

$$\int e^{-x^2}dx = \int_0^x e^{-t^2}dt := F(x) \qquad F'(x)=e^{-x^2}.$$

Ja wyrazić F funkcjami elementarnymi.

TW: TO SIĘ NIE UDA!!!

Całki niewłaściwe: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, $\int_a^{\infty} f(x)dx$

Definicja: Niech $f:[a,\infty[\,\longrightarrow\mathbb{R}$ będzie ciągła,

i przypuśćmy, że istnieje granica $\lim\limits_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx$.

Wówczas granicę $\lim\limits_{y\to\infty}\int_a^y f(x)dx$ nazywamy całką niewłaściwą z f na odcinku $[a,\infty[$ i oznaczamy $\int_a^{\infty} f(y)dy$.

Przykład $\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{y\to\infty}\int_0^y e^{-x}dx$

$$= \lim_{y\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^y = \lim_{y\to\infty}\left(1-e^{-y}\right) = 1.$$

Warunek Cauchy'ego zbieżności całki:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{M>0}\ \forall_{y_2>y_1>M}\quad \left|\int_a^{y_2}f(x)dx - \int_a^{y_1}f(x)dx\right| = \left|\int_{y_1}^{y_2}f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Definicja: Mówimy, że całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest bezwzględnie zbieżna jeśli całka $\int_0^{\infty}|f(x)|dx$ jest zbieżna.

Uwaga: Całka bezwzględnie zbieżna jest zbieżna.

War. Cauchy dla $\int_a^{\infty}|f|$: $\int_{y_1}^{y_2}|f(x)|dx < \varepsilon$

implikuje war. Cauchy'ego dla $\int_{y_1}^{y_2} f(x)dx$:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}f(x)dx\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2}|f(x)|dx < \varepsilon.$$

Jeśli całka $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest zbieżna ale nie jest bezwzględnie zbieżna to mówimy, że $\int_a^{\infty} f(x)dx$ jest warunkowo zbieżna.

Przykład: $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ - kiedyś udowodnimy.

$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ nie jest bezwzględnie zbieżna.

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin(x)|}{x}dx \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin(x)|dx = \frac{1}{(k+1)\pi}\cdot\int_0^{\pi}\sin(x)dx = \frac{1}{(k+1)\pi}\left(-\cos(x)\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Skoro $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = +\infty$ to $\int_0^{\infty}\frac{|\sin(x)|}{x}dx = +\infty$.

Definicja Mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest bezwzględnie zbieżna jeśli całka $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ jest zbieżna.

Uwaga: Całka bezwzględnie zbieżna jest zbieżna.

War. Cauchy dla $\int_a^\infty |f|$: $\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon$

implikuje war. Cauchy'ego dla $\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx$:

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{y_1}^{y_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest zbieżna ale nie jest bezwzględnie zbieżna to mówimy, że $\int_a^\infty f(x)\,dx$ jest warunkowo zbieżna.

Przykład: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$ - kiedyś udowodnimy.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ nie jest bezwzględnie zbieżna.

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geqslant \frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|\,dx = \frac{1}{(k+1)\pi}\cdot\int_0^\pi \sin(x)\,dx = \frac{1}{(k+1)\pi}\left(-\cos(x)\right)\Big|_0^\pi = \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Skoro $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k} = +\infty$ to $\int_0^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx = +\infty$.

Tw. (KRYTERIUM ABELA-DIRICHLETA DLA CAŁEK)

Niech $f, g : [a, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ - ciągłe oraz

(a) g - monotoniczna oraz $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(b) $\exists K > 0$ że dla $y_2 > y_1 > a$ $\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| < K$

Wówczas całka $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ jest zbieżna.

Przykłady: $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sin(x)}{x}\,dx + \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

$a = 1$ $f(x) = \sin(x)$ i $g(x) = \frac{1}{x}$

$$\left|\int_{y_1}^{y_2} \sin(x)\,dx\right| = |\cos y_1 - \cos y_2| \leqslant 2 = K.$$

② **Całki Fresnela.**

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx = \left\{\begin{matrix} y = \phi(x) = x^2 \\ y^{\frac{1}{2}} = x \end{matrix}\right\} = \int_0^\infty \frac{\sin(x^2)}{2x}\,\underbrace{2x\,dx} = \int_0^\infty \frac{\sin(y)}{2\cdot y^{\frac{1}{2}}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{2}}}\,dy$$ - całka zbieżna $g(y) = \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}}$, $f(y) = \sin(y)$

$$\int_a^b f(\phi(x))\,\underbrace{\phi'(x)\,dx} = \int_c^d f(y)\,\underbrace{dy}$$

Całki niewłaściwe: $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)\,dx$

KRYTERIUM ABELA-DIRICHLETA.

$f, g : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ - ciągłe.

g - monotoniczna $\lim_{y\to\infty} g(y) = 0.$

$\left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)\,dx\right| < K \quad a \le y_1 < y_2 < \infty$, K - nie zależy od y_1, y_2.

Wówczas $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$ jest zbieżna.

TWIERDZENIE O WARTOŚCI ŚREDNIEJ DLA CAŁKI:

① Jeśli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła, $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ - całkowalna oraz $h(x) \ge 0$ dla $x \in [a,b]$

to $\exists\, c \in [a,b]$ t. że $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = f(c)\int_a^b h(x)\,dx$

② f - j.w., $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła i monotoniczna

to $\exists\, c \in [a,b]$, że $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx.$

Dowód: dalej ...

Dowód A-D:

Kryt. Cauchy'ego dla całki $\int_a^\infty f(x)g(x)\,dx$:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M : \quad y_2 > y_1 > M \Rightarrow \left|\int_{y_1}^{y_2} f(x)g(x)\,dx\right| < \varepsilon.$

Z ② w TW. O WAR. ŚREDNIEJ

$\exists\, c \in [y_1, y_2] \quad \int_{y_1}^{y_2} f(x)g(x)\,dx = g(y_1)\int_{y_1}^{c} f(x)\,dx + g(y_2)\int_c^{y_2} f(x)\,dx$

Niech M będzie takie, że dla $y > M$ $|g(y)| < \frac{\varepsilon}{2K}$

$\rightarrow \left|g(y_1)\int_{y_1}^{c} f(x)\,dx + g(y_2)\int_c^{y_2} f(x)\,dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2K}\cdot K + \frac{\varepsilon}{2K}\cdot K = \varepsilon$ jeśli $y_2 > y_1 > M$. ∎

Na przykład: $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ jest zbieżna.

DOWÓD (WAR. ŚR.): $\inf_{[a,b]} f \cdot h \le f\, h \le \sup_{[a,b]} f \cdot h$

① $\inf_{[a,b]} f \int_a^b h(x)dx \le \int_a^b f(x)\,h(x)\,dx \le \sup_{[a,b]} f \int_a^b h(x)\,dx.$ (*)

Jeśli $\int_a^b h(x)\,dx = 0$ to $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0 = f(c)\int_a^b h(x)\,dx$ c - dowolne

Jeśli $\int_a^b h(x)\,dx > 0$ to dzieląc (*) przez $\int_a^b h(x)\,dx$ i stosując tw Darboux, znajdę $c \in [a,b]$: $f(c) = \frac{\int_a^b fh}{\int_a^b h}$

(2) Bez straty ogólności mogę zał. że g jest rosnąca.
zał. na moment, że g jest różniczkowalna. W szczególności
$g'(x) \geq 0$. Zdefiniujmy $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Całkujemy przez części:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(b)g(b) - \overset{0}{F(a)}\,g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \underset{=}{\overset{\exists c \in [a,b].}{=}}$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - F(c)\int_a^b g'(x)\,dx =$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\,dx - F(c)\big(g(b) - g(a)\big) = g(b)\cdot\left(\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx\right)$$

$$+ g(a)\int_a^c f(x)\,dx = g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx \quad \blacksquare$$

Ciągi i szeregi funkcyjne

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. $f_n(x) = x^n$

Dla każdego $x \in [0,1]$ $f_n(x)$ jest zbieżny

oraz $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$ $\quad f_n \to f$ - punktowo.

Przykład

$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

$f(x) = e^x$

$\forall x \in \mathbb{R}\ f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$

Definicja

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ i $f_n : A \to \mathbb{R}$ gdzie $n \in \mathbb{N}$.

(a) Mówimy, że $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo do $f : A \to \mathbb{R}$
jeśli $\forall x \in \mathbb{R}$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\quad \{ |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \}$ $\quad f_n \xrightarrow{\text{punktowo}} f$

(b) Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do $f : A \to \mathbb{R}$
jeśli $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. $\quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{jednostajnie}} f$

$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$

Zauważmy, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$ oraz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(P1) Dla $f_n(x) = x^n$ weźmy $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$: $\left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$.

czyli $f_n \to f$ - punktowo ale nie dąży jednostajnie.

(P2) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ $\quad \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{[0,1]} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n \rightrightarrows \exp|_{[0,1]}$.

Definicje

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ i $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo do $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

(a) Mówimy, że $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo do $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$
jeśli $\forall x \in A \quad f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ $\quad \left\{ |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \right\}$ $\quad f_n \xrightarrow{\text{punktowo}} f$

(b) Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$
jeśli $\sup\limits_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{jednostajnie}} f$

$f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$

Zauważmy, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$ oraz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$.

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leqslant \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

(P1) Dla $f_n(x) = x^n$ weźmy $x_n = \frac{1}{2^{\frac{1}{n}}}$: $\left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$.

czyli $f_n \longrightarrow f$ - punktowo ale nie dąży jednostajnie.

(P2) $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $\quad \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{[0,1]} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n \rightrightarrows \exp|_{[0,1]}$.

Twierdzenie

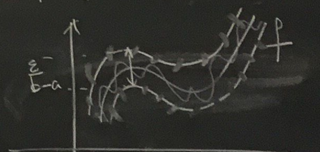
Niech $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi.

Jeśli $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ to $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalne

oraz $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$.

Dowód: Ustalmy $\varepsilon > 0$. Czy istnieje podział Π
t. że $\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < 2\varepsilon$?

Skoro $f_n \rightrightarrows f$ to istnieje n_0 że $\forall x \in [a,b]$ $\quad |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$



Istnieje podział Π dla f_{n_0}, że

$$\overline{S}(f_{n_0},\Pi) - \underline{S}(f_{n_0},\Pi) < \varepsilon.$$

Wtedy $f_{n_0} - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f \leqslant f_{n_0} + \frac{\varepsilon}{b-a}$, dla $x \in [a,b]$.

$\overline{S}(f,\Pi) \leqslant \overline{S}(f_{n_0},\Pi) + \varepsilon$. $\quad$ W takim razie $\quad \overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < 2\varepsilon$.

$\underline{S}(f,\Pi) \geqslant \underline{S}(f_{n_0},\Pi) - \varepsilon$, $\quad$ i f jest funkcją całkowalną.

$\inf\limits_{\Pi}$: $\int f \leqslant \int f_{n_0} + \varepsilon$ $\quad$ $\sup\limits_{\Pi}$: $\int f \geqslant \int f_{n_0} - \varepsilon$. $\Rightarrow |\int f - \int f_{n_0}| < \varepsilon$

Przechodząc z $n_0 \to \infty$ $\quad \left|\int f - \lim\limits_{n_0\to\infty} \int f_{n_0}\right| < \varepsilon$.

zatem

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f$$