$$\int_{I^k} d\omega = \int_{[0,1]^k} \frac{\partial f}{\partial x^i}(-1)^{i-1}\, dx^1 dx^2 \dots dx^k \overset{\text{Tw. Fubiniego}}{=} (-1)^{i-1}\int f(x^1,\dots,\underset{i\text{-ty}}{1},\dots,x^k) - f(x^1,\dots,0,\dots,x^k)\, dx^1 \dots \widehat{dx^i} \dots dx^k$$

Analiza przypadku ogólnego: $\omega \in \Omega^{k-1}(O)$ $\quad c : [0,1]^k \to O$

$$\int_{\partial c} \omega = \int_{\partial I^k} c^* \omega$$

i dalej $\int_c d\omega = \int_{I^k} c^* d\omega = \int_{I^k} d\, c^*\omega = \int_{\partial I^k} c^*\omega = \int_{\partial c}\omega$

24/10/2k16

$c : [0,1]^k \to O \subset \mathbb{R}^n \qquad \omega \in \Omega^k_{\text{róż}}(O) \Rightarrow \int_c \omega = \int_{[0,1]^k} c^*\omega$

$c^*\omega$ – k-forma na k-kostce jest kombinacją liniową wyrażeń w postaci $\underbrace{f(x^1 \dots x^k)\, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k}_{\text{to wiadomo jak całkować}}$

Tw. Stokesa dla k-kostek

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega \quad \text{gdzie } c = \sum_{\substack{i=1 \\ \alpha = \{0,1\}}}^{k} (-1)^{i,\alpha} c_{i,\alpha}$$

Dalszy cel: wykazanie tw. Stokesa dla rozmaitości.

← górna część sfery

← brzeg, czyli drogą

pola wektorowe na rozmaitościach
formy różniczkowe – " –
całkowanie form różniczkowych.

M – rozmaitość z brzegiem ∂M wymiaru k, ω jest k-1 formą na M to $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$.

Przypomnienie:

$\mathcal{U}, V \underset{\text{otw}}{\subset} \mathbb{R}^n \qquad h : \mathcal{U} \to V$ nazywamy dyfeomorfizmem jeśli h jest gładką bijekcją oraz h^{-1} jest odwzorowaniem gładkim.

Niech $M \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że M jest rozmaitością k-wymiarową jeśli $\forall x \in M\ \exists$ zbiory otwarte $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ t. że $x \in \mathcal{U}$ i istnieje dyfeomorfizm $h : \mathcal{U} \to V$ t. że $h(\overset{(\text{obraz})}{\mathcal{U} \cap M}) = V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$

gdzie $V \cap \mathbb{R}^k \times \{0\} = \{y \in V : y^{k+1} = y^{k+2} = \dots = y^n = 0\}$

Twierdzenie.

Niech $O \subset \mathbb{R}^n$ oraz $g: O \to \mathbb{R}^p$ t. że $\forall x \in O$ $g(x) = 0$, pochodna $g'(x)$ ma rząd p. Wówczas $\{x \in O : g(x) = 0\}$ jest rozmaitością $n-p$ wymiarową

Przykład $O = \mathbb{R}^3$ $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1$. $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1$ czyli $p=1$ a $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\right\}$ jest sferą 2 wymiarową

Układy współrzędnych:

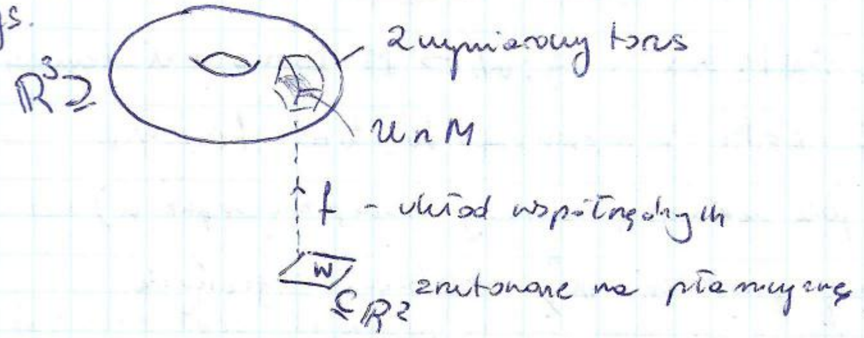
M - rozmaitość, $x \in M$, $h: \mathcal{U} \to V$ j.w.

Niech $W \subset \mathbb{R}^k = \{a \in \mathbb{R}^k : (a, 0) \in V\}$ gdzie $0 \in \mathbb{R}^{n-k}$

Rozważmy odwzorowanie $f: W \to \mathbb{R}^n$ t. że $f(a) = h^{-1}(a, 0) \in M$

Zauważmy, że $f(W) = \mathcal{U} \cap M$. To f nazywamy układem współrzędnych wokół $x \in M$.

Rys.



Własności f: (1) jest ~~ciągłe~~ gładkie

(2) rząd $f'(a) = k$. Rozważmy odwzorowanie $H: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^k$ gdzie $H(x) = (h^1(x), \dots, h^k(x))$. Wówczas $H \circ f = id_{\mathbb{R}^k}$ a zatem $H'(f(a)) \circ f'(a) = id$, a więc rząd $f' = k$.

Uwaga: Niech $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}^n$ i $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}^n$ będą dwoma układami współrzędnych (pochodzącymi od h_1, h_2 - odpowiednio)

to odwzorowanie jest gładkie; odwzorowanie przejścia między układami współrzędnych.

Rozmaitości z brzegiem

$\mathbb{R}^k \supset \underset{\text{półprzestrzeń}}{\mathbb{H}^k} = \{ (x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k \geqslant 0 \}$

Definicja: $M \subset \mathbb{R}^n$ jest k-rozmaitością z brzegiem jeśli $\forall x \in M$ spełniony jest warunek z definicji rozmaitości lub spełniony jest następujący warunek:

$\exists\ \mathcal{U}, V \underset{otw}{\subset} \mathbb{R}^n$ oraz dyfeomorfizm $h : \mathcal{U} \to V$ t.że $h(\mathcal{U} \cap M) = V \cap \mathbb{H}^k \times \{0\}$ oraz k-ta współrzędna $h(x)$ jest równa 0.

Uwaga: Jeśli M jest rozmaitością z brzegiem to zbiór punktów $x \in M$ spełniających drugi warunek z powyższej definicji oznaczamy ∂M.
∂M jest rozmaitością $k-1$ wymiarową.

Przestrzeń styczna: Niech $M \ni x$ i $f : W \to M$ będzie układem współrzędnych wokół $x \in M$ i niech $a \in W$ t.że $f(a) = x$.
Niech $\mathbb{R}^k_a$ - będzie jak wcześniej. (wektory zaczepione w pkt. a)
Mając f definiujemy przestrzeń $\mathbb{R}^n_x$ wektorów stycznych do M w punkcie x: $T_xM = \{ (f'v)_x : v_a \in \mathbb{R}^k_a \}$.
Oznaczenie $f_* : \mathbb{R}^k_a \to \mathbb{R}^n_x$ gdzie $f_* v_a := (f'(a)v)_{f(a)}$.
Innymi słowy $T_xM = f_*(\mathbb{R}^k_a)$
Niech dane będzie odwzorowanie $F : M \to \bigcup_{x \in M} T_xM$.
Mówimy, że F jest polem wektorowym na M jeśli $\forall x \in M \quad F(x) \in T_xM$.

Jeśli F jest polem wektorowym na M oraz f jest układem współrzędnych wokół $x \in M$ to $\exists$ tylko jedno pole wektorowe G na W t.że $F(y) = f_*(G(b))$ gdzie $y = f(b)$ a $b \in W$.

Mówimy, że jeśli G jest gładkie to F jest gładkie w x.

Niech $\omega : M \to \bigcup_{x \in M} \Omega^p(T_x M)$ jest p-formą na M jeśli $\omega(x) \in \Omega^p(T_x M)$

k-wymiarowa rozmaitość

Mówimy, że ω jest gładką formą różniczkową jeśli $f^*\omega$ jest gładką p-formą na W dla wszystkich układów współrzędnych $f : W \to \mathbb{R}^n$.

Przypomnienie: $f^*\omega \in \Omega^p_{róż}(W)$ gdzie dla $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^k_a$ $a \in W$

$(f^*\omega)(a)(v_1, \dots, v_p) := \omega(f(a))(f_* v_1, \dots, f_* v_p)$.

Uwaga: Wystarczy gładkość w jednym układzie współrzędnych.

Różniczkowanie p-form na M. Niech ω będzie gładką p-formą na M. Niech $x \in M$, $f : W \to \mathbb{R}^n$ będzie układem współrzędnych wokół x oraz $a \in W$: $f(a) = x$.

Istnieje dokładnie jedna $(p+1)$-forma różniczkowa η na M t. że. jeśli $w_1, \dots, w_{p+1} \in T_x M$ oraz $v_1, \dots, v_{p+1} \in \mathbb{R}^k_a$ $f_* v_i = w_i$ to $\eta(x)(w_1, \dots, w_{p+1}) = d(f^*\omega)(a)(v_1, \dots, v_{p+1})$

Notacja $\eta = d\omega$.

Niezależność definicji η od wyboru układu wsp.:

Niech $f_i : W_i \to \mathbb{R}^n$ będą ukł. wsp. wokół $x \in M$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(a_1) = x = f_2(a_2) \\ f_{1*}(v_i) = w_i = f_{2*}(u_i) \end{array}\right\} \quad u_i = (f_2^{-1} \circ f_1)_*(v_i)$$

$$d(f_1^* \omega)(a_1)(v_1, \dots, v_{p+1}) = d(f_2^*\omega)(a_2)(u_1, \dots, u_{p+1})$$

Zastosujmy cofnięcie $(f_2^{-1} \circ f_1)^*$ do $d f_2^* \omega$.

$$(f_2^{-1} \circ f_1)^* d(f_2^* \omega) = d((f_2^{-1} \circ f_1)^* \circ f_2^* \; \omega) = d f_1^* \omega$$

Zatem $(f_2^{-1} \circ f_1)^* (d f_2^* \omega)(a)(v_1, \dots v_{p+1}) = (d f_2^* \omega)(f_2^{-1} \circ f_1(a))((f_2^{-1} \circ f_1)_* v_1, \dots, (f_2^{-1} \circ f_1)_* v_{p+1})$

$= d(f_2^* \omega)(b)(u_1, \dots, u_{p+1}) = d(f_1^* \omega)(a)(v_1, \dots, v_{p+1})$

Czyli definicja nie zależy od wyboru f_i.