Zadanie

Znaleźć masę i określić położenie środka ciężkości kuli $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$ przy rozkładzie masy

$$\varrho(x,y,z) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \text{gdzie} \quad a, k > 0$$

Rozwiązanie:

1. Obszar całkowania i zamiana zmiennych

(a) We współrzędnych kartezjańskich

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+(z-a)^2 \leqslant a^2\}$$

gdyż

$$x^2+y^2+z^2-2az = x^2+y^2+z^2-2az+a^2-a^2$$
$$= x^2+y^2+(z-a)^2-a^2 \leqslant 0$$

$$\int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 2az\}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(b) We współrzędnych walcowych (uwaga: konflikt oznaczeń ϱ - ozn. tutaj x^2+y^2)

$$x = \varrho\cos\varphi$$
$$y = \varrho\sin\varphi$$
$$z = z.$$

Jakobian zamiany zmiennych

$$\left|\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\varrho,\varphi,z)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

$$= \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho$$

$$x^2+y^2+z^2 = \varrho^2+z^2 \leqslant 2az.$$

Zatem $\varrho^2 \leqslant 2az - z^2$.

W szczególności $\underbrace{2az-z^2}_{z(2a-z)} \geqslant 0$ i widzimy, że

$z \in [0, 2a]$

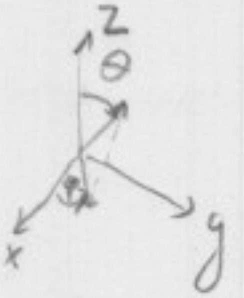
Z twierdzenia o zamianie zmiennych dostajemy

②

$$\int_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 2az\}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\{0\leq z\leq 2a,\ \rho^2 \leq 2az-z^2\}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz.$$

(c) We współrzędnych sferycznych



$$x = r\sin\theta\cos\varphi \qquad r\in[0,\infty[$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad \theta\in[0,\pi]$$

$$z = r\cos\theta \qquad \varphi\in[0,2\pi]$$

Jakobian zamiany zmiennych

$$\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi, & r\cos\theta\cos\varphi, & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi, & r\cos\theta\sin\varphi, & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta, & -r\sin\theta, & 0\end{bmatrix}\right|$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{rozwinięcie} \\ \text{wzg. ostatniego} \\ \text{wiersza}\end{matrix}\right\} = \cos\theta\left(r^2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \right.$$

$$\left. + r^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right) + r\sin\theta\left(r\sin^2\theta\cos^2\varphi + \right.$$

$$\left. + r\sin^2\theta\sin^2\varphi\right) = r^2\cos^2\theta\sin\theta + r^2\sin^3\theta = r^2\sin\theta$$

$x^2+y^2+z^2 = r^2 \leq 2az = 2a\,r\cos\theta$ - obszar całkowania zatem $r \leq 2a\cos\theta$. Skoro $r \geq 0$ to $2a\cos\theta \geq 0$ i $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ gdyż zakres zmienności θ'y to obszar $[0,\pi]$.

Z twierdzenia o zamianie zmiennych

$$\int\limits_{\{x^2+y^2+z^2\le 2az\}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{\{0\le r\le 2a\cos\theta \,\&\, \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\}} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\, r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

② Obliczenie masy

(a) Rachunki we współrzędnych kartezjańskich są ciężkie. Odpuszczamy je sobie

(b) Współrzędne walcowe.

Mamy tu konflikt oznaczeń ale trudno...

$$\text{masa} = M = \int\limits_V \rho\, dV = \int\limits_{\{x^2+y^2+z^2\le 2az\}} \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dx\,dy\,dz$$

rozkład masy

$$= k \int \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}}\, \rho\, d\rho\, d\varphi\, dz = k\int_0^{2a} dz \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} =$$

ρ ze wsp walcowych

$$\{0\le z\le 2a,\ 0\le \rho\le\sqrt{2az-z^2}\}$$

$$= k\int_0^{2a} dz \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \rho\, d\rho \frac{2\pi}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = 2\pi k\int_0^{2a} dz\, \sqrt{\rho^2+z^2}\Big|_0^{\sqrt{2az-z^2}} =$$

$$= 2\pi k \int_0^{2a} \left(\sqrt{2az} - z\right) dz = 2\pi k \left(\int_0^{2a} \sqrt{2a}\, z^{\frac12} - \frac{z^2}{2}\Big|_0^{2a} \right) =$$

$$= 2\pi k \left(\sqrt{2a}\, \frac{2}{3} z^{\frac32}\Big|_0^{2a} - 2a^2 \right) = 2\pi k \cdot \left(\sqrt{2a}\,(2a)^{\frac32}\frac{2}{3} - 2a^2 \right)$$

$$= 2\pi k \left(4\,\frac{2}{3}\, a^2 - 2a^2 \right) = 2\pi k \left(\frac{8}{3} - 2 \right) a^2 = 2\pi k a^2\, \frac{2}{3} =$$

$\boxed{\frac{4}{3}\pi k a^2}$ – masa, obliczona we współrzędnych walcowych

(c) Współrzędne sferyczne

$$M = \int\limits_{\{0\le r\le 2a\cos\theta \,\&\, \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\}} \frac{k}{r}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} dr \int_0^{2\pi} d\varphi\, k\, r \sin\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r \sin\theta \, dr =$$

$$= 2\pi k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2a\cos\theta} \sin\theta \, d\theta = \frac{2\pi k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta$$

$$= 4\pi k a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = -4\pi k a^2 \frac{1}{3} \cos^3\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$= \frac{4}{3}\pi k a^2$ - masa obliczona we współrzędnych sferycznych, zgadza się!!!

③ Środek ciężkości bryły w jednorodnym polu grawitacyjnym

$$\vec{r}_0 = \int_V \vec{r} \cdot \rho \cdot dV \cdot \frac{1}{M}$$

(a) Obliczenia we współrzędnych kartezjańskich są uciążliwe

(b) Współrzędne walcowe {Uwaga na konflikt oznaczeń ρ}

Uwaga $\int_V \vec{r} \rho \, dV = \begin{bmatrix} \int_V x \rho \, dV = 0 \\ \int_V y \rho \, dV = 0 \\ \int_V z \rho \, dV \end{bmatrix}$

$$\int_V x \rho \, dV = \int_{\{x^2+y^2+z^2 \le 2az\}} x \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, dx dy dz = k \int_0^{2a} dz \int_0^{\sqrt{2az-z^2}} \rho \, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \rho \cos\varphi \, d\varphi}_{=0} = 0$$

Zatem wsp x & y środka ciężkości są równe (5)
zero. Środek ciężkości V jest na osi Z.

$$\int_V z\varrho\, dV = k2\pi\int_0^{2a} z\,dz\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\varrho\, d\varrho\,\frac{1}{\sqrt{\varrho^2+z^2}} = \left\{\begin{matrix}\text{Obliczenia takie}\\ \text{jak dla masy}\end{matrix}\right\}$$

$$= 2\pi k\int_0^{2a} z\left(\sqrt{2az}-z\right)dz = 2\pi k\int_0^{2a}\left(\sqrt{2a}\,z^{\frac{3}{2}}-z^2\right)dz$$

$$= 2\pi k\left(\sqrt{2a}\cdot\frac{2}{5}(2a)^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{3}(2a)^3\right) =$$

$$= 2\pi k\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right)(2a)^3 = \frac{2\pi k}{15}\cdot 8a^3$$

Zatem wsp. z środka ciężkości:

$$z_{śr} = \frac{2\pi k}{15}8a^{\cancel{3}}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}\pi k a^{\cancel{2}}} = \frac{16a}{20} = \frac{4}{5}a$$

Zauważmy niezależność od k!

(c) Współrzędne sferyczne.

$$x_{śr} = y_{śr} = 0$$

$$\int_V z\varrho\, dV = \int_{\{0\le r\le 2a\cos\theta\ \&\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\}} \frac{k}{r}\cdot r\cos\theta\, r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2\pi k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta\sin\theta\int_0^{2a\cos\theta} r^2\,dr =$$

$$2\pi k\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\cos\theta\sin\theta\,\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2a\cos\theta} = \frac{2\pi k\, 8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi k}{3} 8a^3 (-1) \frac{\cos^5\theta}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi k\, 8a^3}{15}$$

$$z_{śr} = \frac{2\pi k 8a^3}{15} \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}\pi k a^2} = \frac{4}{5} a$$ zgadza się!!!

Zadanie: Oblicz objętości brył

(a) $B_1 = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 4z, \ x^2+y^2 \leqslant 3z\}$

(b) $B_2 = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 1, \ z \geqslant \sqrt{x^2+y^2}\}$

(c) $B_3 = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 4, \ x^2+y^2 \leqslant 3z\}$

(d) $B_4 = K_1 \cup K_2 \quad B_5 = K_1 \cap K_2$ gdzie

$K_1 = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z\}$

$K_2 = \{x^2+y^2+z^2 \leqslant 2\}$.

Rozwiązanie Objętość $V = \int_V 1\, dxdydz$

(a) Współrzędne sferyczne

$$\text{Obj } B_1 = \int_{\{r^2 \leqslant 4r\cos\theta \ \& \ r^2\sin^2\theta \leqslant 3r\cos\theta\}} r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$2\pi \int r^2 \sin\theta \, dr\, d\theta$

to samo

Rozstawienie granic całkowania

$0 \leqslant r \leqslant 4\cos\theta \quad \& \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

Zatem $0 \leqslant r \leqslant \min\left\{4\cos\theta, \frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}\right\}$

Poza tym mamy $\cos\theta \geqslant 0$ czyli

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Kiedy $4\cos\theta \leqslant 3\cos\theta \frac{1}{\sin^2\theta}$?

Skoro $\cos\theta \geqslant 0$ to dostajemy warunek $\sin^2\theta \leqslant \frac{3}{4} \Rightarrow \{\sin\theta \geqslant 0\}$

$\sin\theta \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{3}]$

Podsumowując:

dla $\theta \in [0, \frac{\pi}{3}] \quad 0 \leq r \leqslant 4\cos\theta$

dla $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \quad 0 \leq r \leq \frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}$

Zatem $\text{Obj } B_1 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{4\cos\theta} dr\, r^2 \sin\theta +$

$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} dr\, r^2 \sin\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \sin\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{4\cos\theta} +$

$+ 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sin\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{\frac{3\cos\theta}{\sin^2\theta}} = \underbrace{2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \sin\theta \frac{64}{3}\cos^3\theta}_{I_1} +$

$\overbrace{2\pi \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\theta \sin\theta\, 9 \cdot \frac{\cos^3\theta}{(1-\cos^2\theta)^3}}^{I_2} =$

$$I_1 = \frac{64}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)\cos^4\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{64}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^4\frac{\pi}{3}\right) = \frac{64}{3}\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{16}\right)\frac{64}{3} =$$

$$\frac{15}{64}\cdot\frac{64}{3} = 5$$

$$I_2 = 9\cdot\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta\, \frac{\cos^3\theta}{(1-\cos^2\theta)^3}\sin\theta = \left\{\begin{array}{l} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\, d\theta \\ u \in [0, \frac{1}{2}] \end{array}\right\} =$$

$$-9\int_{\frac{1}{2}}^{0} du\, \frac{u^3}{(1-u^2)^3} = -9\int_{\frac{1}{2}}^{0} u^2 \frac{u}{(1-u^2)^3}\, du = \left\{\begin{array}{ll} f = \frac{u}{(1-u^2)^3} & G = u^2 \\ F = +\frac{1}{4(1-u^2)^2} & g = 2u \end{array}\right.$$

$$= +9\cdot\left(\frac{u^2}{4}\frac{1}{(1-u^2)^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2u}{4(1-u^2)^2}\right) =$$

$$= +9\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{(1-u^2)}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= +9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right)\right) = 9\cdot\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3} - 1\right)\right) =$$

$$9\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\right) = 9\left(\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{4}$$

Obj $B_1 = 5\cdot 2\pi + \frac{1}{4}\cdot 2\pi = \frac{20}{2}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{21}{2}\pi$.

Zobaczmy jak wyglądałyby rachunki we współrzędnych walcowych

Rozstawmy granice całkowania:

$\rho^2 + z^2 \leq 4z$, $\rho^2 \leq 3z \Rightarrow \rho^2 \leq \min\{3z, 4z - z^2\}$.

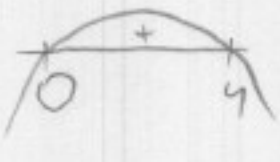
Zauważmy, że $z \geq 0$ bo $0 \leq \rho^2 \leq 3z$.

Kiedy $\min\{3z, 4z-z^2\} = 3z$?

$0 \leq 3z \leq 4z - z^2 \Rightarrow 3z \leq z(4-z)$

Czyli skoro $z \geq 0$ to $3 \leq 4-z \Rightarrow z \in [0,1]$

Zauważmy, że $4z - z^2 \geq 0 \Rightarrow$

$z(4-z) \geq 0$  $z \in [0,4]$.

Zatem

$$\text{Obj } B_1 = 2\pi \underbrace{\int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{3z}} \rho\, d\rho}_{\tilde{I}_1} + 2\pi \underbrace{\int_1^4 dz \int_0^{\sqrt{4z-z^2}} \rho\, d\rho}_{\tilde{I}_2}$$

$$\tilde{I}_1 = \int_0^1 dz\, \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{3z=\rho^2} = \int_0^1 dz \cdot \frac{3z}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\tilde{I}_2 = \int_1^4 dz\, \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{4z-z^2=\rho^2} = \frac{1}{2}\int_1^4 (-z^2+4z) = \frac{1}{2}\left(-\frac{z^3}{3} + \frac{4}{2}z^2\right)\Big|_1^4$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\cdot(4^2-1) - \frac{1}{3}(4^3-1)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot 15 - \frac{1}{3}\, 63\right) =$$

$$\frac{1}{2}\cdot(30-21) = \frac{9}{2}$$

$$\text{Obj } B_1 = 2\pi\left(\frac{3}{4} + \frac{18}{4}\right) = 2\pi\cdot\frac{21}{4} = \frac{21\pi}{2}$$ - zgadza się

Rozwiązanie punktu (d)

Użyjemy wsp. walcowych

$$\text{Obj}\, B_4 = \int\limits_{\{x^2+y^2+z^2 \leq 2z \text{ lub } x^2+y^2+z^2 \leq 2\}} dV$$

$$\varrho^2 + z^2 \leq 2z \quad \text{lub} \quad \varrho^2 + z^2 \leq 2$$

$$\varrho^2 \leq 2z - z^2 \quad \text{lub} \quad \varrho^2 \leq 2 - z^2$$

$$\varrho^2 \leq \max\{2z - z^2, 2 - z^2\}$$

Kiedy $2z - z^2 \geq 2 - z^2 \ ? \Rightarrow z \geq 1$.

Czyli dla $z \geq 1$ $\varrho^2 \leq 2z - z^2$ i wówczas

$z \in [1,2]$.

$2z - z^2 \geq 0 \quad z(2-z) \geq 0$

Natomiast dla $z \leq 1$

$\varrho^2 \leq 2 - z^2$ i wówczas $2 - z^2 \geq 0$

ostatecznie $z \in [-\sqrt{2}, 1]$.

Zatem $\text{Obj}\, B_4 = 2\pi \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \varrho\, d\varrho + 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{1} dz \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \varrho\, d\varrho =$

$$2\pi \int_1^2 dz\, \frac{2z - z^2}{2} + 2\pi \int_{-\sqrt{2}}^{1} dz\, \frac{2 - z^2}{2} =$$

$$\pi\left(z^2 - \frac{z^3}{3}\Big|_1^2\right) + \pi \cdot \left(2z - \frac{z^3}{3}\Big|_{-\sqrt{2}}^{1}\right) = \pi \cdot \left(4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3}\right) + \pi\left(2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$+ \pi\left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) =$$

$= 5\pi - \frac{8}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\sqrt{2} = \frac{7}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\sqrt{2} = \frac{\pi}{3}\left(7 + 4\sqrt{2}\right)$

Obliczmy Obj B_5. Tym razem

$\varrho^2 + z^2 \leq 2z$ oraz $\varrho^2 + z^2 \leq 2$

i dla $z \geqslant 1$ $\quad 2 - z^2 \leq 2z - z^2$

Wtedy $\varrho^2 \leq 2 - z^2$ & $2 - z^2 \geqslant 0 \Rightarrow z \in [1, \sqrt{2}]$.

Natomiast dla $z \leq 1$: $2z - z^2 \leq 2 - z^2$;

Wtedy $\varrho^2 \leq 2z - z^2$ i $2z - z^2 \geqslant 0 \Rightarrow z \in [0,1]$

$$\text{Obj } B_5 = 2\pi \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} \varrho\, d\varrho + 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} dz \int_0^{\sqrt{2-z^2}} \varrho\, d\varrho =$$

$$\pi \int_0^1 (2z - z^2)\,dz + \pi \int_1^{\sqrt{2}} (2 - z^2)\,dz =$$

$$\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \pi\left(2z - \frac{z^3}{3}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \pi 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) - \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1) =$$

$$\pi\left(\frac{2}{3} - 2 + \frac{1}{3} + 2\sqrt{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = \pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - 1\right).$$

Obj K_1 = Obj. kuli $K((0,0,1), 1) = \frac{4}{3}\pi$

Obj K_2 = Obj kuli $K((0,0,0), \sqrt{2}) = \frac{4}{3}\pi 2 \cdot \sqrt{2}$.

Zauważmy, że

$$Obj(K_1) + Obj(K_2) - Obj(K_1 \cap K_2) =$$

$$\frac{4}{3}\pi + 2\sqrt{2}\,\frac{4}{3}\pi - \pi\left(\frac{4}{3}\sqrt{2} - 1\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{4}{3} + 1 + (2\sqrt{2} - \sqrt{2})\cdot\frac{4}{3}\right) =$$

$$\frac{7}{3}\pi + \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{\pi}{3}\left(7 + 4\sqrt{2}\right) = Obj(K_1 \cup K_2)$$

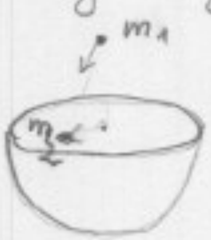
Zadanie

Obliczyć siłę przyciągania między jednorodną bryłą $B = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \leq 0\}$ o gęstości $\rho = 1$, a masą punktową m umieszczoną w p-cie $(0,0,1)$.

Rozwiązanie

B - dolna połówka kuli.

Siła przyciągania: $F = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$



m_2 ma współrzędne $(x,y,z) \in B$.

m_1 ma współrzędne $(0,0,1)$.

$r(m_1, m_2) = \left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Wektor łączący m_2 z m_1, $\vec{r}$ spełnia.

$(x,y,z) + \vec{r} = (0,0,1)$ czyli $\vec{r} = (-x,-y,1-z)$.

Zatem $$\vec{F} = -\int_B \frac{G\, m\, \rho\, dV}{\left(x^2+y^2+(z-1)^2\right)^{\frac{3}{2}}}(-x,-y,1-z) = \left\{\underset{\text{gęstość}}{\rho = 1}\right\}$$

$$= Gm \begin{bmatrix} \int\limits_B \frac{x\,dV}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \int\limits_B \frac{y\,dV}{(x^2+y^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \int\limits_B \frac{(z-1)\,dV}{(x^2+y^2+(z-1))^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}$$ – wektor siły przyciągania działającej na masę m.

Rozstawiamy granice całkowania, wybieramy współrzędne walcowe $\begin{matrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{matrix}$

$$B = \{ z \leq 0,\ \rho^2 + z^2 \leq 1,\ \varphi \in [0, 2\pi] \}$$

czyli $0 \leq \rho^2 \leq 1 - z^2 \Rightarrow z \in [-1, 0]$.

Współrzędne x i y siły przyciągania są równe zero:

$$\int_{-1}^{0} dz \int_{0}^{\sqrt{1-z^2}} \rho\, d\rho \cdot \int_{0}^{2\pi} d\varphi\ \frac{\overbrace{\rho\cos\varphi}^{=x}}{(\rho^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 = F_x$$

Podobnie $F_y = 0$.

$$\frac{F_z}{Gm} = \int_{-1}^{0} dz \int_{0}^{\sqrt{1-z^2}} \rho\, d\rho \int_{0}^{2\pi} \frac{(z-1)\,d\varphi}{(\rho^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{0} (z-1)\,dz \int_{0}^{\sqrt{1-z^2}} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+(z-1)^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{0} (z-1)\,dz \; \frac{-1}{\left[\rho^2 + (z-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_{0=\rho}^{\sqrt{1-z^2}=\rho} =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{0} (z-1)\,dz \left(-\frac{1}{\left(1-z^2+(z-1)^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{(z-1)^{2\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{0} (z-1)\,dz \cdot \left(\frac{1}{|z-1|} - \frac{1}{\left(1-\cancel{z^2}+\cancel{z^2}-2z+1\right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{0} (z-1)\,dz \left(\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(2-2z)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$2\pi \int_{-1}^{0} dz \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(z-1)}{(1-z)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$-2\pi + 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{0} (1-z)^{\frac{1}{2}} = -2\pi - \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} (1-z)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^{0}$$

$$= 2\pi \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} \left(1 - 2^{\frac{3}{2}} \right) \right) =$$

$$\frac{2\pi}{3} \left(-3 - \sqrt{2} \left(1 - 2^{\frac{3}{2}} \right) \right) = \frac{2\pi}{3} \left(1 - \sqrt{2} \right). < 0$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mG \cdot \frac{2\pi}{3}(1-\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$ - siła działająca na m.

Zadanie

Oblicz moment bezwładności względem osi z stożka $C = \{ x^2+y^2 \leq z^2,\ 0 \leq z \leq 1 \}$ o rozkładzie gęstości masy $\rho(x,y,z) = z^2$.

$\uparrow$ gęstość

uwaga na konflikt oznaczeń.

Rozwiązanie

$$I_{Oz} = \int_C d\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Oz\right]^2 \rho \, dV$$ gdzie

$d\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, Oz\right]$ jest odległością $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ od osi Oz

$= \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Mamy więc do obliczenia

$$\int_C \left(x^2+y^2\right) \cdot z^2 \, dV = \left\{ \begin{matrix} \text{Rozstawiamy} \\ \text{granice, wsp.} \\ \text{walcowe} \end{matrix} \right\}$$

$$\rho^2 \leq z^2 \Rightarrow z \in [0,1],\ \rho \in [0,z],\ \varphi \in [0,2\pi]$$

$$\int_C \left(x^2+y^2\right) z^2 \, dV = 2\pi \int_0^1 dz \int_0^z \rho \, d\rho \cdot \rho^2 z^2 =$$

$$= 2\pi \int_0^1 z^2 dz \int_0^z \rho^3 d\rho = \frac{2\pi}{4} \int_0^1 z^6 dz = \frac{2\pi}{4 \cdot 7} = \frac{\pi}{14}$$

Zadanie: Rozwinąć w szereg Fouriera funkcję 2π-okresową $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t. że $f(x)=x$, $x\in[0,2\pi]$.
Korzystając z tożsamości Parsevala wykazać, że

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Rozwiązanie:

Szereg Fouriera funkcji f:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\hat{f}(n)e^{inx} \quad \text{gdzie } \hat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}xe^{-inx}dx \underset{\substack{\text{całk.}\\ \text{p. części}}}{\overset{n\neq 0}{=}} \left\{\begin{matrix} e^{-inx}=\left(\frac{1}{-in}e^{-inx}\right)' \\ (x)'=1\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left.-\frac{1}{in}xe^{-inx}\right|_0^{2\pi}+\frac{1}{in2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inx}dx=\frac{i}{n}\cdot\frac{2\pi}{2\pi}=\frac{i}{n}.$$

Dla $n=0$ $\quad \hat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi}=\frac{1}{4\pi}\cdot 4\pi^2=\pi.$

Tożsamość Parsevala

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(n)|^2=\pi^2+2\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{8\pi^3}{3}=\frac{4}{3}\pi^2$$

Zatem $\frac{4}{3}\pi^2-\pi^2=2\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}$ i $\frac{\pi^2}{6}=\sum_1^{\infty}\frac{1}{n^2}.$