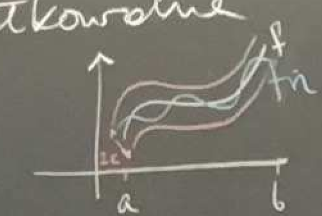
$f_n \longrightarrow f$ $\quad$ $f_n, f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ - całkowalne

zbieżność jednostajna

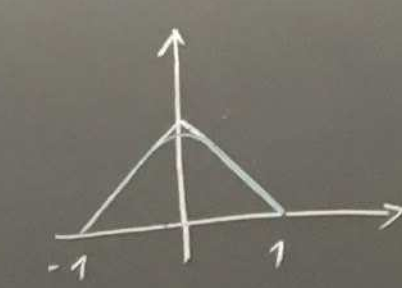


Jeśli $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ to $\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$

$\quad = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$

Pytanie: $f_n \rightrightarrows f$ oraz f_n są różniczkowalne $\overset{?}{\cancel{\Rightarrow}}$

f - różniczkowalna oraz $f_n' \rightrightarrows f'$.



Przykład (niemal jednostajnej zbieżności).

$f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{\text{punktowo}} e^x$.

$f_n \rightrightarrows e^x$ na $[-M, M]$. dla $M > 0$

$\sup_{x\in[-M,M]} |f_n(x) - e^x| = \sup_{\dots} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

f_n nie zbiega jednostajnie do e^x na $\mathbb{R}$.

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} > \left.\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|_{x=[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}} = 1$.

Definicja Niech I będzie odcinkiem $f_n, f : I \to \mathbb{R}$.

Mówimy, że f_n dąży do f niemal jednostajnie jeśli dla $[a,b] \subset I$ $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$.

Piszemy $f_n \xrightarrow{n.j.} f$.

Stwierdzenie. Niech $f_n, f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ ciągłe oraz $f_n \xrightarrow{n.j.} f$.

Niech $x_0 \in I$. Rozważmy $F_n(x) := \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,dt$, $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

Wówczas $F_n \xrightarrow{n.j.} F$. ustalmy $\varepsilon > 0$ Bez straty ogólności $x_0 \in [a,b]$

Dowód: $\sup_{x\in[a,b]} |F_n(x) - F(x)| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} \int_{x_0}^{x} |f_n - f|(t)\,dt$

$\{$ Dla dost. dużych n $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ $\quad t \in [a,b]$ $\}$

$\underset{n-j.w.}{\leqslant} (b-a)\,\varepsilon$.

Stw. I - przedział otwarty $g_n : I \longrightarrow \mathbb{R}$ różniczkowalne

Przypuśćmy, że ① $g_n' \xrightarrow{n.j.} f$; $f\ I \to \mathbb{R}$.

② istnieje $x_0 \in I$ $g_n(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} c \in \mathbb{R}$.

Wówczas istnieje funkcja różniczkowalna $g: I \to \mathbb{R}$

t. że $g_n \xrightarrow{n.j.} g$ oraz $g' = f$.

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx} g_n = \frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} g_n = g'$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{d}{dx}}$$

Dowód $g_n(x) = \int_{x_0}^{x} g_n'(t)\,dt + g_n(x_0)$ – zachodzi równość,

$$g(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + C$$

Skoro $g_n' \xrightarrow{n.j.} f$ to (patrz poprzednie twier.) $g_n \xrightarrow{n.j.} g$ oraz $g' = f$ ∎

Czy jeśli $g_n : I \to \mathbb{R}$ są ciągłe oraz $g_n \xrightarrow{n.j.} g$

to $g: I \to \mathbb{R}$ – ciągła? Tak jest!!!

Stwierdzenie. Jeśli $g_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe oraz $g_n \rightrightarrows g$

to g – ciągła.

Dowód Badamy ciągłość w $x \in [a,b]$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

1. Niech $n_0 \in \mathbb{N}$ będzie takie, że $|g_{n_0}(t) - g(t)| < \varepsilon$, $t \in [a,b]$.
2. g_{n_0} – ciągła $\Rightarrow \exists \delta$, że $|g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y)| < \varepsilon$ dla y: $|x-y| < \delta$.

Szacowanie

$$|g(x) - g(y)| \overset{|x-y|<\delta}{=} |g(x) - g_{n_0}(x) + g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y) + g_{n_0}(y) - g(y)|$$

$$\leq |g(x) - g_{n_0}(x)| + |g_{n_0}(x) - g_{n_0}(y)| + |g_{n_0}(y) - g(y)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

Def $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : n, m > N \text{ to } \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon.$$

Stw. Jeśli $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ j.w. to $\exists\, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ t. że $g_n \rightrightarrows g$.

D: Zauważmy, że $\forall x \in [a,b]$ $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ jest liczbowym ciągiem

Cauchy'ego. Definiujemy $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$.

Skoro $\forall x \in [a,b]$ oraz n, m – d. dużych mamy

$|g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon$ to przechodząc $m \to \infty$

mamy $|g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ dla d. dużych n oraz wszystkich x.

To oznacza, że $\sup_{[a,b]} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ ∎

Kartkówka

$$\int x^2 e^{-x}\,dx = ?$$

Wniosek: $C[0,1]$ ze zbieżnością jednostajną jest przestrzenią zupełną.

Szeregi potęgowe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Dla jakich x szereg jest zbieżny?

Zbieżny gdy $|x| < R$ gdzie $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

Co to jest limsup: $\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sup_{k\geq n} b_k\right)}_{\text{maleje wraz ze wzrostem } n,}$

Zauważmy, że (Kryterium Cauchy'ego) szereg o wyrazach dodatnich $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny jeśli $\limsup_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}} < 1$.

Rzeczywiście, jeśli $\limsup_{n\to\infty} c_n^{\frac{1}{n}} = r < 1$ to od pewnego miejsca (dla d. dużych n) mamy

$r-\varepsilon < \sup_{k\geq n} c_k^{\frac{1}{k}} < r+\varepsilon$; ε t. że $r+\varepsilon < 1$, $r-\varepsilon > 0$

Zatem $c_k < (r+\varepsilon)^k$; $\sum_{k=0}^{\infty} (r+\varepsilon)^k < \infty \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k < \infty$

Wniosek: Szereg potęgowy $\sum a_n x^n$ jest zbieżny (bezwzględnie) dla x t. że $\{c_n = |a_n| \cdot |x|^n\}$ $\underbrace{\left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)}_{=\frac{1}{R}} |x| < 1$.

czyli gdy $|x| < R$

Podobnie: gdy $|x| > R$ to $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest rozbieżny

Czy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest (niemal) jednostajnie zbieżny dla $x \in]-R, R[$

Tw. (Kryterium Weierstrassa)

Przypuśćmy, że dla $f_n: I \to \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$, istnieją stałe $a_n > 0$ t. że

① $|f_n(x)| \leq a_n$ dla $x \in I$

② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$.

$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2+x^2}}_{f_n(x)}}$

Wówczas szereg $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny. W szczególności jeśli f_n są ciągłe to $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą.

Dowód: Czy $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ spełnia jedn. warunek Cauchy'ego?

Ustalmy $n > m > N$ - zal. od ε (dla dost. dużych n, m)

$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} a_k < \varepsilon$ - nie zależy od x, Zatem $\sum_{k=0}^{n} f_k(x) \rightrightarrows \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

jeśli ciągłe $\Rightarrow$ ciągła

$\boxed{\text{Przykład 1}}$ $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{n^2+x^2}$, $a_n = \frac{1}{n^2}$.

$\left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. $\quad \sum \frac{1}{n^2} < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ - zbieżny i zadaje f-cję ciągłą,

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2} \in \mathbb{R}$$

Tw. o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych:

g_n różniczkowalne & g_n' - ciągłe & $\sum_{n=0}^{\infty} g_n' = f$ (zb. niemal jednostajnie) & $\exists x_0 \in I$, że $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_0)$ - zbieżne.

$\Downarrow$ tw.

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ - zbieżny niemal jed. do pewnej funkcji g oraz $g' = f$

Stosujemy do szeregów potęgowych: $g_n = a_n x^n$

$\boxed{\text{Przykład 2}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad \frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

Udowodnimy, że $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

zbieżny dla $x \in]-R, R[$ gdzie $\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

zbieżny na $]-R', R'[$

$\frac{1}{R'} = \limsup_{n\to\infty} (n|a_n|)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}$; $R = R'$

Ponadto obie strony są zbieżne niemal jednostajnie na $]-R, R[$

niech $r < R-\varepsilon$ dla $|x| < r$ mamy $|x|^n \cdot |a_n| \leq \frac{r^n}{(R-\varepsilon)^n}$ $\quad$ | bo $\frac{1}{|a_n|^{\frac{1}{n}}} \in]R-\varepsilon, R+\varepsilon[$ od pewnego miejsca

czyli z tw Weierstrassa $\sum a_n x^n$ - jed. zb. na $]-r, r[$

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - zb. niemal jednostajnie na $]-R, R[$.

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ — " — " — " — " — " —

Z tw. powyżej $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest różniczkowalne oraz $\left(\sum a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Iterując powyższe widzimy szeregi potęgowe definiują funkcje ∞-różniczkowalne. Można je różniczkować wyraz po wyrazie.

Tw. o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych.

g_n różniczkowalne & g_n' - ciągłe & $\sum_{n=0}^{\infty} g_n' = f$ zb. niemal jednostajnie & $\exists x_0 \in I$, że

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x_0)$ - zbieżne.

$\Downarrow$ tzn.

$\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ - zbieżny niemal jed. do pewnej funkcji g oraz $g' = f$

Stosujemy do szeregów potęgowych: $g_n = a_n x^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$ - zb. niemal jednostajnie na $]-R, R[$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$ — || — || — || — || —

Z tw. powyżej $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ jest różniczkowalne oraz $\left(\sum a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Iterując powyższe widzimy szeregi potęgowe definiują funkcje ∞-różniczkowalne. Możemy je różniczkować wyraz po wyrazie.

Przykład Znaleźć sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \Big|_{x=\frac{1}{2}}$

$$= x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = x \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}} = x \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right)' \Big|_{x=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2$$