Wykład 26.11.

Przypomnienie: $\mathbb{C}^n$ - n wymiarowe nad $\mathbb{C}$

Iloczyn skalarny $\langle u|v\rangle = \bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{u}_n v_n$.

Jeśli $Y \subset \mathbb{C}$ jest podprzestrzenią wektorową w $\mathbb{C}^n$ to Y jest wyposażona/dziedziczy iloczyn skalarny.

Przykład: $Y \subset \mathbb{C}^3$. Baza Y $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}\right)$.

$$Y = \left\{ \lambda \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \quad \dim Y = 2$$

Y można utożsamić z $\mathbb{C}^2$

$$\mathbb{C}^2 \ni \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} \in Y$$

Iloczyn skalarny w Y

$$\left\langle \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \right\rangle = \bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 + \bar{u}_2 v_2 =$$

$$= 2\bar{u}_1 v_1 + \bar{u}_2 v_2 .$$

We współrzędnych $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ wzór na iloczyn skalarny jest bardzo skomplikowany.

Wzory są skomplikowane ale własności: nierówność trójkąta, nierówność Cauchy-Schwarza pozostają.

Wygodnym i dobrze uzasadnionym jest wprowadzenie abstrakcyjnych p-ni z iloczynem skalarnym.

Definicja Iloczynem skalarnym na przestrzeni wektorowej zespolonej V nazywamy odwzorowanie

$V \times V \ni (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \longmapsto \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$, które jest

- liniowe w $\mathbf{v} \in V$,
- antyliniowe w $\mathbf{u} \in V$
- i dodatnio określone: $\forall \mathbf{u} \neq 0 \ \underbrace{\langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle \in \mathbb{R}_{>0}}_{\text{wielkość ściśle dodatnia}}$

Fakt $\underbrace{\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle = \overline{\langle \mathbf{v}|\mathbf{u}\rangle}}$ sprzęż. zespolone.

$$\langle u+v|u+v\rangle \geq 0 \Rightarrow 1) \ \langle u|v\rangle + \langle v|u\rangle \in \mathbb{R}$$

$$\langle u+iv|u+iv\rangle \geq 0 \Rightarrow 2) \ i(\langle u|v\rangle - \langle v|u\rangle) \in \mathbb{R}.$$

1) $\operatorname{Im}\langle v|u\rangle = -\operatorname{Im}\langle u|v\rangle$

2) $\operatorname{Re}\langle u|v\rangle = -\operatorname{Re}\langle v|u\rangle$

Powtarzając rozumowania przedstawione dla $\mathbb{C}^n$ dowodzimy

(1) Nierówność Cauchy'ego-Schwarza

$$|\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|. \quad \text{gdzie } \|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}|\mathbf{u}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

(2) Nierówność trójkąta.

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Iloczyn skalarny w bazie ortonormalnej:

Jeśli V jest prz. z iloczynem skalarnym wymiaru V oraz $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset V$ jest baza ortonormalną V, tzn $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$:

to $\langle u_1 f_1 + \ldots + u_n f_n | v_1 f_1 + \ldots + f_n v_n \rangle = \bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{u}_n v_n$

Wzory w bazie o.n. takie jak dla $\mathbb{C}^n$.

Czy istnieje baza o.n. p-ni V?

Ortogonalizacja Grama-Schmidta.

Niech $\dim V = n$ oraz $e_1, \ldots, e_n$ będzie jakąś bazą p-ni V. Indukcyjnie definiujemy $f_1, \ldots, f_n$:

1) $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$

2) Jeśli $f_1, \dots, f_m$ t. że $\langle f_i | f_j \rangle = \delta_{ij}$

to (a) $\tilde{f}_m = e_m - \langle f_1 | e_m \rangle f_1 - \dots - \langle f_{m-1} | e_m \rangle f_{m-1}$

(b) $f_m = \frac{\tilde{f}_m}{\|\tilde{f}_m\|}$

Czy baza $\{f_1 \dots f_m\}$ jest ortonormalna?

$k < m$ to $\langle f_k | \tilde{f}_m \rangle = \langle f_k | e_m \rangle - \langle f_k | e_m \rangle = 0$

Wniosek: $\{f_1, \dots, f_m\}$ jest bazą ortonormalną.

Ustalmy wektor $u \in V$ i zdefiniujmy

odwzorowanie

$\varphi_{\mathbf{u}} : V \ni \mathbf{v} \longmapsto \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$ notację $\varphi_u = \langle u |$.

Przykład: $V = \mathbb{C}^n$ z kanonicznym il. sk.

Dla $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ mamy $\varphi_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = \bar{u}_1 v_1 + \ldots + \bar{u}_n v_n$

$$= [\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Funkcjonały liniowe są wszystkie tej postaci (zadane przez wiersz #n).

Ogólniej (Twierdzenie): jeśli $\varphi : V \to \mathbb{C}$ jest funkcjonałem liniowym na V to istnieje dokładnie jeden wektor $u \in V$ taki, że $\varphi = \langle u|$ $\{\varphi(v) = \langle u|v\rangle\}$

(Dowód) Niech $f_1 \dots f_n$ będzie bazą ortonormalną i niech $\lambda_i = \varphi(f_i)$.

Wektor $u = \bar{\lambda}_1 f_1 + \dots + \bar{\lambda}_n f_n$.

↑ sprawdź, że $\varphi_u = \varphi$. – ćwiczenie.