$[a,b] \subset \mathbb{R}$ $-\infty < a < b < \infty$

$C([a,b])$ - funkcje ciągłe na $[a,b]$

$\mathbb{R}[\cdot]$ - wielomiany

$w(t) = a_n t^n + \ldots + a_1 t + a_0$ $\quad a_i \in \mathbb{R}$.

Niech $f \in C([a,b])$ i $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$w_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f$ gdy (zb. jednostajnie na $[a,b]$)

$\sup_{[a,b]} |w_k(t) - f(t)| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

Pytanie: czy taki ciąg $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ istnieje dla każdej funkcji f.

f ciągła na $[a,b]$ jest jednostajnie ciągła

tzn.: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta$. $|s-t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$

Twierdzenie (Weierstrassa).
Dla każdej $f \in C([a,b])$ istnieje $(w_k)_{k \in \mathbb{N}}$ t. że $w_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f$.

Dowód: BSO zał. że $a = 0$, $b = 1$.
czyli niech $f \in C([0,1])$

Wielomiany Bernsteina dla f:

$$\underbrace{B_n(f)}_{\text{wiel. st. } n.}(t) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Udowodnimy, że $B_n(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ na $[0,1]$

$f_1(t) = 1$ $\quad t \in [0,1]$.

$f_2(t) = t$ $\quad t \in [0,1]$.

$f_3(t) = t^2$ $\quad t \in [0,1]$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (t + 1 - t)^n = 1$$

$$B_n(f_1) = \sum_{k=0}^{n} 1 \cdot \binom{n}{k} t^k (1-t)^k = 1.$$

$$B_n(f_2)(t) = t.$$

$$B_n(f_3)(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \left\{ \frac{k^2}{n^2} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{k}{n^2} \right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \cdot \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{k}{n^2} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) t^k(1-t)^{n-k} =$$

$$= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} t^k (1-t)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^k (1-t)^{n-k}$$

$$= \frac{n-1}{n} t^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} t^{k-2} (1-t)^{n-2-(k-2)} +$$

$$+ \frac{1}{n} t \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} t^{k-1} (1-t)^{n-1-(k-1)}$$

$$= \frac{n-1}{n} t^2 \underbrace{\sum_{k'=0}^{n-2} \binom{n-2}{k'} t^{k'} (1-t)^{n-2-k'}}_{1}\ {}_{k'=k-2} + \frac{1}{n} t \underbrace{\sum_{k'=0}^{n-1} \binom{n-1}{k'} t^{k'} (1-t)^{n-1-k'}}_{1} =$$

$$= \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{1}{n} t = B_n(f_3)(t)$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$.

$f \in C([0,1])$ - dowolna.

Badamy $|B_n(f)(t) - f(t)| = \left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} - f(t) \overbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}^{1}\right|$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

{ niech $\delta > 0$: $|s-t| \leqslant \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon$.

Dzielimy $k \in \{0, \dots, n\}$ na dwie kategorie }

$A_1 = \{ k : |\frac{k}{n} - t| \leq \delta \}$.

$A_2 = \{ k : |\frac{k}{n} - t| > \delta \}$.

$$\sum_{k \in A_1} \dots + \sum_{k \in A_2} \dots \leqslant \underbrace{\sum_{k \in A_1} \varepsilon \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}}_{\leq \varepsilon}$$

$$+ \sum_{k \in A_2} \underbrace{\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right|}_{2 \cdot \sup_{t \in [0,1]} |f|} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \leqslant$$

$$\varepsilon + 2 \cdot \sup_{t \in [0,1]} |f|(t) \sum_{k \in A_2}' \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Niech $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$. {np. $f(x,t)=e^{tx}$, $f(x,t)=t^2x+\sin(t^2+x^2)$ ...} będzie funkcją ciągłą, t.zn. $x_n\to x$ & $t_n\to t$ to $f(x_n,t_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(x,t)$.

$$\boxed{\begin{gathered}\left\|\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{x^2+t^2}\\ \left\|\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{t}\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(x-\tilde{x})^2+(t-\tilde{t})^2}\end{gathered}}$$

np. $x_n=\frac{1}{n}$ $t_n=1-\frac{1}{n^2}$ $f=e^{tx}$

$f(x_n,t_n)=e^{\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\cdot\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{} e^0=f(0,1)$

Mówimy, że $f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła jeśli:

spełniony jest jeden z równoważnych warunków:

1) $\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{\delta}\ \left\|\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{t}\end{pmatrix}\right\|<\delta\Rightarrow\left|f\left(\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}\right)-f\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{t}\end{pmatrix}\right|<\varepsilon.$

2) $\begin{pmatrix}x_n\\t_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\tilde{x}_n\\\tilde{t}_n\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to\infty]{}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix}x_n\\t_n\end{pmatrix}\right)-f\left(\begin{pmatrix}\tilde{x}_n\\\tilde{t}_n\end{pmatrix}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$

$w_k\to f$ $\forall_\varepsilon\ \forall_t\ \exists\ K(\varepsilon,t)$ $k>K(\varepsilon,t)$ $|w_k(t)-f(t)|<\varepsilon$

$w_k\rightrightarrows f$

$\sup|w_k-f|\xrightarrow[k\to\infty]{}0.$

$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists K(\varepsilon)\ k>K$ $\forall_{t\in[0,1]}$

$|w_k(t)-f(t)|<\varepsilon$

Całka z parametrem:

$F(t)=\int_0^1 e^{tx}\,dx$ — zmienna wycałkowana; parametr

$\xrightarrow{t\neq 0}\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_0^1=\frac{1}{t}(e^t-1)$

$$=\begin{cases}1 & t=0.\\ \frac{1}{t}(e^t-1). & t\neq 0.\end{cases}$$

$F(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}$ – szereg potęgowy od t zbieżny dla $t\in\mathbb{R}$. A więc F jest funkcją gładką.

① $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta\ \left\|\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{t}\end{pmatrix}\right\|<\delta \Rightarrow \left|f\begin{pmatrix}x\\t\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{t}\end{pmatrix}\right|<\varepsilon$

② $\begin{pmatrix}x_n\\t_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\tilde{x}_n\\\tilde{t}_n\end{pmatrix}\xrightarrow[n\to\infty]{}\overset{\binom{0}{0}}{0} \Rightarrow f\begin{pmatrix}x_n\\t_n\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}\tilde{x}_n\\\tilde{t}_n\end{pmatrix}\to \overset{\binom{0}{0}}{0}$

22.01.2020 r.

• CAŁKA Z PARAMETREM

$F(t)=\int_0^1 e^{tx}\,dx=\begin{cases}\frac{1}{t}(e^t-1) & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$

$F(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}}{k!}$ - szereg potęgowy zbieżny dla $t\in\mathbb{R}$

F - gładka

$f: [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ - ciągła

$F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$ - czy F jest ciągła, różn?

PRZYPOMNIENIE

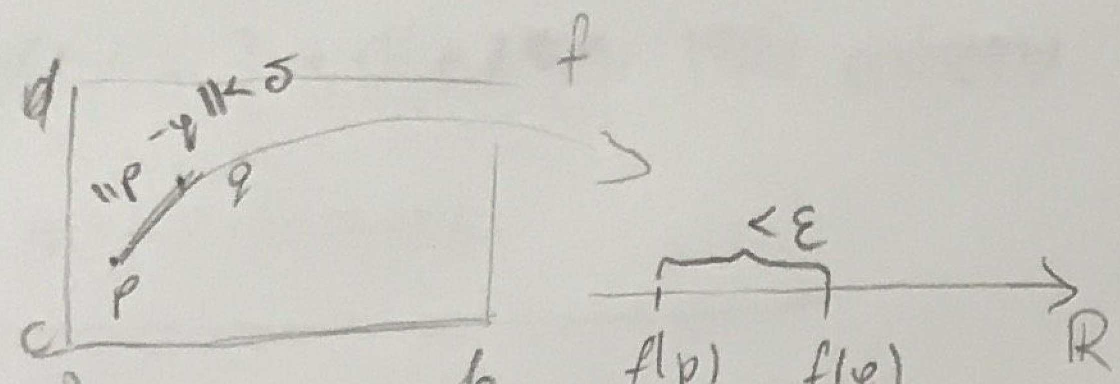
$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ - CIĄGŁA TO g JEST JEDNOSTAJNIE CIĄGŁA.

TW. $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ TO f JEST JEDNOSTAJNIE CIĄGŁA. ZADAJEMY $\varepsilon>0$, SZUKAMY $\delta>0$.

DOWÓD

$p,q\in[a,b]\times[c,d]$ & $\|p-q\|<\delta$

TO $|f(p)-f(q)|<\varepsilon$



CIĄGOWY SPOSÓB MYŚLENIA O JEDNOSTAJNEJ CIĄGŁOŚCI:

$p_n, q_n\in[a,b]\times[c,d]:\ p_n-q_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

WÓWCZAS

$f(p_n)-f(q_n)\to 0$

PRZYPUŚĆMY, ŻE f (CIĄGŁA) NIE JEST JEDNOSTAJNIE CIĄGŁA. WÓWCZAS ISTNIEJĄ p_n, q_n:

$p_n-q_n\to 0$ ALE $|f(p_n)-f(q_n)|>\varepsilon$ $n\in\mathbb{N}$

Z TW. BOLZANO-WEIERSTRASSA DLA 1-go WYMIARU WYNIKA, ŻE Z $p_n\in\mathbb{R}^2$ MOŻNA WYBRAĆ PODCIĄG p_n' ZBIEŻNY DO $p'\in[a,b]\times[c,d]$.

SKORO $p_n'\to p'$ & $p_n'-q_n'\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

TO $q_n'\to p'$.

ZAUWAŻMY, ŻE $\lim_{n\to\infty} f(p_n')=f(p')=\lim_{n\to\infty} f(q_n')\Rightarrow$

$\underbrace{|f(p_n')-f(q_n')|}_{\geq\varepsilon}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ↯ ■

• POCHODNA CZĄSTKOWA WZGLĘDEM PARAMETRU t

$f:[a,b]\times\underbrace{]c,d[}_{\text{otwarty}}\to\mathbb{R}$

JEŚLI $\lim_{h\to 0}\frac{f(x,t+h)-f(x,t)}{h}$ ISTNIEJE TO OZNACZAMY:

$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ I NAZYWAMY JĄ POCHODNĄ CZĄSTKOWĄ WZGLĘDEM PARAMETRU t.

TWIERDZENIE (CIĄGŁOŚĆ CAŁKI Z PARAMETREM)

ZAŁ: $f: [a,b]\times]c,d[\to \mathbb{R}$ - CIĄGŁA

TEZA: $F:]c,d[\to \mathbb{R}$: $F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$ JEST CIĄGŁA

DOWÓD

USTALMY PUNKT $t\in]c,d[$ ORAZ $h>0$

T. ŻE $[t-h, t+h] \subset]c,d[$

f JEST JEDNOSTAJNIE CIĄGŁA NA $[a,b]\times[t-h,t+h]$

NIECH $\varepsilon>0$, ISTNIEJE δ: $p_1=\binom{x_1}{t_1}$ $p_2=\binom{x_2}{t_2}$

SPEŁNIAJĄ $\|p_1-p_2\|<\delta \Rightarrow |f(p_1)-f(p_2)|<\varepsilon$

W SZCZEGÓLNOŚCI BIORĄC:

$p_1=\binom{x}{t}$ $p_2=\binom{x}{t+\tilde{h}}$ GDZIE $|\tilde{h}|<\delta$.

DOSTAJĘ:

$\|p_1-p_2\|=|\tilde{h}|<\delta$ A ZATEM

$|f(x,t)-f(x,t+\tilde{h})|<\varepsilon$ DLA WSZYSTKICH x.

CAŁKUJĄC PO x:

$|F(t+\tilde{h})-F(t)|=\left|\int_a^b (f(x,t+\tilde{h})-f(x,t))\,dx\right|\le$

$\le \int_a^b |f(x,t+\tilde{h})-f(x,t)|\,dx < \varepsilon\cdot(b-a)$

WNIOSEK: F - CIĄGŁA W KAŻDYM PUNKCIE $t\in]c,d[$.

$\blacksquare$

$\frac{\partial}{\partial t} e^{tx} = x e^{tx}$

$\frac{\partial}{\partial t}\sin(t^2+x^2) = 2t\cos(t^2+x^2)$

- TWIERDZENIE (O RÓŻNICZKOWALNOŚCI CAŁKI Z PARAMETREM)

ZAŁ: $f: [a,b]\times]c,d[\to \mathbb{R}$ - CIĄGŁA

f MA CIĄGŁĄ POCHODNĄ CZĄSTKOWĄ $\frac{\partial}{\partial t} f: [a,b]\times]c,d[\to \mathbb{R}$

WTEDY $F(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$ JEST RÓŻNICZKOWALNA ORAZ

$F'(t)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$

DOWÓD

$t\in]c,d[$ ORAZ $h>0$ $[t-h,t+h]\subset]c,d[$

USTALAMY $\varepsilon>0$ i δ: $\|p_1-p_2\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial t}(p_1)-\frac{\partial f}{\partial t}(p_2)\right|<\varepsilon$

JEŚLI $|\tilde{h}|<\delta$ TO $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\tilde{h})-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|<\varepsilon$

$\left|\underbrace{f(x,t+\tilde{h})-f(x,t)}_{}-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\cdot\tilde{h}\right|$ $\exists\,\theta\in]0,1[$ tw. Lagrange'a

$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t+\theta\cdot\tilde{h})-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right)\tilde{h}\right|\le\varepsilon\cdot|\tilde{h}|$

A ZATEM

$\left|F(t+\tilde{h})-F(t)-\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\,dx\cdot\tilde{h}\right|=$

$=\left|\int_a^b\left(f(x,t+\tilde{h})-f(x,t)-\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\tilde{h}\right)dx\right|\le\varepsilon|\tilde{h}|\cdot(b-a)$

ZATEM F - RÓŻNICZKOWALNA ORAZ

$$F'(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

•

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{x^2+t^2} = \frac{1}{t^2}\int_0^\infty \frac{\log(x)\,dx}{\left(\frac{x}{t}\right)^2+1} = \left\{\begin{array}{l} y = \frac{x}{t} \\ y \in [0,\infty[\\ dx = t\cdot dy \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{t^2}\int_0^\infty \frac{\log(y\cdot t)\,t\,dy}{y^2+1} = \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{\log(y)+\log(t)}{y^2+1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^\infty \frac{\log y}{1+y^2}\,dy + \frac{\log(t)}{t}\cdot\frac{\pi}{2} =$$

$$\frac{1}{t}\left(\int_0^1 \frac{\log y}{1+y^2}\,dy + \int_1^\infty \frac{\log y}{1+y^2}\,dy\right) + \frac{\log t}{t}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{\log t}{t}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} y = \frac{1}{z} \quad z = \frac{1}{y} & \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{z^2} \\ z \in [1,\infty] & \end{array}\right\}$$

$$\int_1^\infty \frac{\log\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z^2}\,dz}{1+\frac{1}{z^2}} = -\int_1^\infty \frac{\log z}{1+z^2}\,dz = -\int_1^\infty \frac{\log y}{1+y^2}\,dy$$

T