Zadanie 1

W zbiorze $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wprowadzamy relację
$(m,n) \sim (m',n') \Leftrightarrow m+n' = m'+n$

① Sprawdzić, że jest to relacja równoważności.

② Przypomnieć pojęcie klasy abstrakcji. Sprawdzić, że działania

$[(m,n)] + [(m',n')] = [(m+m', n+n')]$

$[(m,n)] \cdot [(m',n')] = [(mm'+nn', nm'+n'm)]$

są dobrze określone na klasach równoważności

Zadanie 2

przypomnijać definicje

Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania

(a) $f: \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, $f(k_1, k_2) = k_1 + \sqrt{2} \cdot k_2$

(b) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(k) = 2k^2 - 3k + 1$

wsk.: $f(k) = 2\left(k - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$.

Zadanie 3

Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania, opisać jego zbiór wartości i poziomice

(a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ $f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$

(b) $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \in \mathbb{R}$

① Przypomnij pojęcie porządku.
Niech A będzie zbiorem 2^A jego zbiorem podzbiorów
W 2^A wprowadźmy relację zawierania
$B, C \in 2^A$ są w relacji R jeśli $B \subset C$.
Wykazać, że jest to relacja porządku

Kiedy ta relacja jest porządkiem liniowym? Odp: gdy $A = \{*\}$.

② Przypomnij pojęcie relacji równoważności i klas abstrakcji
Uzupełniając wykłady wykazać, że zachodzi następująca dychotomia dla relacji równoważności $R \subset X \times X$:
Niech $x_1, x_2 \in X$ wówczas zachodzi jedna z dwu możliwości:

- $[x_1]_R = [x_2]_R$ ← to wtedy i tylko wtedy gdy $x_1 R x_2$

- $[x_1]_R \cap [x_2]_R$

Wykład 2.

'Zbiór' jest pojęciem pierwotnym. Podobnie pojęciem pierwotnym to przynależność elementu x do zbioru A, co zapisujemy $x \in A$.

Dwa zbiory są równe jeśli mają takie same elementy t.zn. $A = B$ gdy $\forall_x \, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Suma zbiorów: Jeśli I jest pewnym zbiorem oraz dla każdego $i \in I$ dany jest zbiór A_i to (istnieje) zbiór $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists_{i \in I} \, x \in A_i\}$

Podobnie istnieje zbiór $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall_{i \in I} \, x \in A_i\}$

Dalej zakładamy, że istnieje zbiór pusty $\emptyset$

$\forall_x \, x \notin \emptyset$.

Mając dany zbiór A oraz formułę zdaniową φ można zdefiniować podzbiór

$B = \{x \in A : \varphi(x)\}$ Na przykład

$\varphi(x) = x > 1$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N} : x > 1\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$

Ponadto A, B są zbiorami to zbiór $A \setminus B$ definiujemy następująco $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$.

Jeśli A jest dowolnym zbiorem to symbol 2^A oznacza zbiór wszystkich podzbiorów zbioru.

Uwaga: w naiwnej teorii zbiorów łatwo natknąć się na sprzeczności. Wynika to ze zbyt lekkiego używania pojęcia zbioru

Przykład (

Rozważmy zbiór X którego elementami są zbiory A t. że $A \notin A$. Czy $X \in X$?
Jeśli $X \in X$ to znaczy że $X \notin X$. Jeśli $X \notin X$ to $X \in X$, sprzeczność.

"Fryzjer, mieszkaniec pewnego miasta, goli tych jego mieszkańców, którzy sami się nie golą. Czy fryzjer goli się sam?"

"Ciotka lubi tych co siebie nie lubią i nie lubi tych, co siebie lubią"

Zejdźmy na ziemię. Wykazać, że

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right] = (2,4].$$

otwarty   domknięty.

$\exists_n \; x \in \left[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right]$ to $x \in (2,4]$.

Jeśli $x \in (2,3]$ to istnieje n t. że $x > 2+\frac{1}{n}$ (dlaczego? to wynika z aksjomatów ciała liczb rzecz.)
zatem $x \in \left[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right]$ i $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right]$
Jeśli $x \in [3,4]$ to $x \in \left[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right]$ dla $n=1$.

$$(2,4] = (2,3] \cup [3,4] \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[2+\frac{1}{n}, 3+\frac{1}{n}\right] \checkmark$$

Iloczyn kartezjański. Niech X i Y będą zbiorami oraz $x \in X$ i $y \in Y$. Wówczas (x,y) nazywamy parą uporządkowaną, i zbiór takich par nazywamy iloczynem kartezjańskim zbiorów X i Y. Ozn $X \times Y$

Definicja: Relację między zbiorami X i Y nazywamy podzbiór iloczynu R kartezjańskiego $X \times Y$.

Przykład: X zbiór psów przebywających na terenie Warszawy, Y zbiór ludzi przebywających na terenie Warszawy. Mówimy, że pies $x \in X$ jest w relacji R z człowiekiem $y \in Y$ gdy y jest właścicielem x. Notacja: xRy gdy $(x,y) \in R$.

Uwaga: relacja ta jest ogólna:
- istnieją psy bez właściciela
- ludzie nieposiadający psa
- ludzie który mają więcej niż jednego psa.

Niech X zbiorem oraz $R \subset X \times X$. Wówczas mówimy, że R jest relacją w zbiorze X.
Mówimy, że R jest porządkiem w X jeśli
(1) R jest zwrotna $\forall_{x \in X}\ xRx$
(2) R jest przechodnia $\forall_{x_1, x_2, x_3 \in X} (x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \Rightarrow x_1 R x_3)$
(3) R jest antysymetryczna: $x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$.

Mówimy, że porządek R jest liniowy jeśli
$\forall_{x_1, x_2 \in X}\ (x_1, x_2) \in R$ lub $(x_2, x_1) \in R$

Przykład: w zbiorze $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$ wprowadzamy relację $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
$(k,l) \in R$ gdy istnieje $m \in \mathbb{N}$ t. że
$k+m=l$. Piszemy wówczas $k \leq l$.
Przykład $4 \leq 4$ bo $4+0=4$.
$4 \leq 5$ bo $4+1=5$. itd.
Porządek jest liniowy

Przykład: A - dowolny zbiór. Może być skończony; $A = \{1,2\}$

$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ - zbiór 4-po elementowy

$2^A \times 2^A$ ma 16 elementów.

Relacje: $R \subset 2^A \times 2^A$

$(\emptyset,\emptyset), (\emptyset, \{1\}), (\emptyset,\{2\}), (\emptyset,\{1,2\})$

$(\{1\},\{1\}), (\{1\},\{1,2\})$

$(\{2\},\{2\}), (\{2\},\{1,2\})$

$(\{1,2\},\{1,2\})$

Innymi słowy ARB gdy $A \subset B$.

Relacje równoważności:

Mówimy, że $R \subset X \times X$ jest relacją równoważności jeśli jest
1. zwrotna $\forall_{x \in X}\ xRx$
2. symetryczna $\forall_{x,y \in X} (xRy \Rightarrow yRx)$
3. przechodnia $\forall_{x,y,z \in X} ((xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz)$

Przykład 1. $\mathcal{L}$ zbiór wszystkich prostych na płaszczyźnie. (l_1,l_2) są w relacji jeśli $l_1 \parallel l_2$

Przykład 2 (k,l) - pary liczb naturalnych dwie pary $(k_1,l_1), (k_2,l_2)$ są w relacji jeśli $k_1+l_2 = k_2+l_1$ ($k_1-l_1 = k_2-l_2$)

Definicja: Niech $x \in X$. Klasą abstrakcji x względem relacji równoważności R nazywamy $\{y \in X : yRx\}$. (5)

Uwaga jeśli $[x_1] \cap [x_2] \neq \emptyset$ to $[x_1] = [x_2]$ i jest to równoważne $x_1 R x_2$.

$[x_1] \cap [x_2] \ni y \Rightarrow x_1 R y R x_2$ Jeśli $z \in [x_1]$ to $z R x_1 R y R x_2 \Rightarrow z \in [x_2]$.

Przez symetrię $[x_1] = [x_2]$

Przykład $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ różnica

$[(1,5)] = \{(0,4), (1,5), (2,6), (3,7), \ldots\}$ "$= 1-5$" $=$ "-4"

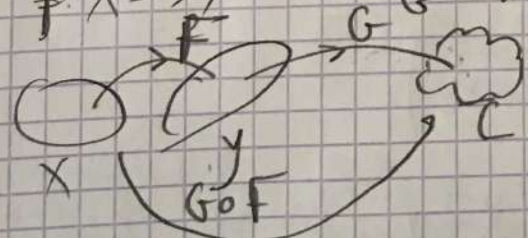
$[(1,6)] = \{(0,5), (1,6), (2,7), (3,8), \ldots\}$ "$= -5$".

Definicja

Odwzorowanie Odwzorowanie z X do Y to relacja $F \subset X \times Y$ t. że dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jedno $y \in Y$ t. że xFy. Wówczas zamiast $(x,y) \in F$ lub xFy piszemy $y = F(x)$ a samą relację $F \subset X \times Y$ zapisujemy $F: X \to Y$

Złożenie odwzorowań

$F: X \to Y$ $G: Y \to Z$



to $G \circ F: X \to Z$

$G \circ F(x) = G(F(x))$.

Przykład

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $F(s,t) = s^2 + t^2$ $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $G(x) = e^x$

$F \circ G$ – nie ma sensu

$G \circ F(s,t) = e^{s^2+t^2}$.