Wykład 30.11.2021.

Przypomnienie

Funkcjonał $\langle u| : V \longrightarrow \mathbb{C}$ definiujemy wzorem $\langle u|(v) = \langle u|v\rangle$

Notacja braket:

$\langle u|$ - bra, funkcjonał, kowektor

$|v\rangle$ - ket, wektor

$\langle u||v\rangle = \langle u|v\rangle \in \mathbb{C}$

$|v\rangle\langle u|$ - odwzorowanie liniowe

$|v\rangle\langle u||w\rangle = \langle u|w\rangle \cdot v$

Jeśli $\|e\| = 1$ to $|e\rangle\langle e|$ jest rzutem ortogonalnym na $\underbrace{\mathbb{C}\cdot|e\rangle}_{}$.

1-wym. podprz. generowane przez e.

Ogólniej: jeśli $W \subset V$ jest podprzestrzenią wektorową p-ni V, $\{e_1, \dots, e_m\}$ jest bazą ortonormalną V to rzut ortogonalny na V jest dany wzorem:

$$|e_1\rangle\langle e_1| + |e_2\rangle\langle e_2| + \dots + |e_m\rangle\langle e_m|.$$

Konkretne wzory w $\mathbb{C}^n$: jeśli $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = |u\rangle$ to $\langle u| = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n]$ oraz

$$|u\rangle\langle u| = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\bar{u}_1, & \dots, & u_1\bar{u}_n \\ \vdots & & \\ u_n\bar{u}_1, & \dots & u_n\bar{u}_n \end{bmatrix}$$

Hermitowskie sprzężenie operatora

$A: V \longrightarrow V$ operator liniowy.

$\langle u|$ - bra związane z u

operacja $|v\rangle \rightsquigarrow |Av\rangle \rightsquigarrow \langle u|Av\rangle \in \mathbb{C}$

jest liniowym funkcjonałem na V

$$|v\rangle \longmapsto \langle u|Av\rangle \in \mathbb{C}.$$

W takim razie $\exists!$ bra $|w\rangle$ t. że

$$\langle w|v\rangle = \langle u|Av\rangle.$$

Konkretne wzory w $\mathbb{C}^n$:

$$\langle u| = [\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n], \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\langle w| = [\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n]$$

$$\sum_j \bar{w}_j v_j = \sum_{i,j} \bar{u}_i A_{ij} v_j = \sum_j \left(\sum_i \overline{\bar{A}_{ij} u_i} \right) v_j.$$

W takim razie $w_j = \sum_i \bar{A}_{ij} u_i$.

Niech $A^+ = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \dots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & & \\ \bar{a}_{1n} & & \dots & \bar{a}_{nn} \end{bmatrix}$ - transpozycja

plus sprzężenie zespolone.
Widzimy, że $w = A^+ u$.
Definicję A^+ nazywamy sprzężeniem hermitowskim macierzy A.
Ogólniej: V - p-ń z iloczynem skalarnym, $A: V \to V$ - operator liniowy $u, v \in V$. Niech $w \in V$ będzie taki, że $\langle u | Av \rangle = \langle w | v \rangle$ dla wszystkich $v \in V$.
Niech $A^+ : V \to V$ t. że $w = A^+ v$.

Operator liniowy A^+ nazywamy sprzężeniem hermitowskim operatora A.

A^+ - notacja fizyków

A^* - notacja matematyków.

Wyrażenie w bazie ortonormalnej:

$\mathcal{E}=\{e_1, \ldots, e_n\}$ baza o.n. przestrzeni V.

$A: V \to V$ operator liniowy.

$[A]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ - macierz A.

$[A^+]_{\mathcal{E}} = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ - macierz A^+.

$b_{ij} = \overline{a_{ji}}$ – skąd ta formułka?

(1) $a_{ij} = \langle e_i | A e_j \rangle$.

Rzeczywiście $A e_j = \sum_k e_k a_{kj}$.

$$\langle e_i | A e_j \rangle = \sum_k a_{kj} \underbrace{\langle e_i | e_k \rangle}_{\delta_{ik}} = a_{ij}.$$

(2) $b_{ij} = \langle e_i | A^+ e_j \rangle = \overline{\langle A^+ e_j | e_i \rangle} = \overline{\langle e_j | A e_i \rangle} = \overline{a_{ji}}$.

Wniosek: $(A^+)^+ = A$.

$$(A+B)^+ = A^+ + B^+$$

Stwierdzenie.

$$(A\circ B)^\dagger = B^\dagger\circ A^\dagger$$

Dowód: $\langle u | A\circ B v\rangle = \langle A^\dagger u | B v\rangle = \langle B^\dagger\circ A^\dagger u | v\rangle$

$= \langle (A\circ B)^\dagger u | v\rangle$ ■

Do dalszych rozważań potrzebne będzie formuła polaryzacyjna:

$$\langle u | A v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \langle i^k u + v | A(i^k u + v)\rangle$$

Dowód: ćwiczenie nadukowe.

Wniosek: Jeśli $\langle v | A v \rangle = 0$ dla wszystkich $v \in V$ to $A = 0$.