Analiza matematyczna, aksjomatyka liczb rzeczywistych

Pojęcia pierwotne:

dany jest zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ z dwoma wyróżnionymi elementami 0 i 1 (przy czym $0 \neq 1$), relacja liniowego porządku $\leq$ oraz dwoma dwa działania $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - dodawanie i $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - mnożenie

Aksjomaty

- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ - tworzą ciało przemienne (patrz wykład z algebry)
- Związek relacji $\leq$ z działaniami
  (a) jeśli $x \leq y$ to $\forall_{z \in \mathbb{R}}\ x + z \leq y + z$
  (b) jeśli $x \leq y$ i $0 \leq z$ to $xz \leq yz$

Ćwiczenie: Wykazać, że (a) $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ 0 \leq x^2$ (b) $\forall_{x,y \in \mathbb{R}} \left((x \leq y) \Rightarrow (y \leq x)\right)$

- aksjomat ciągłości

Dla jego sformułowania potrzebnych jest kilka pojęć. Definicja: Mówimy, że $M \in \mathbb{R}$ jest ograniczeniem górnym zbioru A, jeśli $\forall_{x \in A}\ x \leq M$.

Definicja (sup) Mówimy, że $M \in \mathbb{R}$ jest kresem górnym jeśli M jest ograniczeniem górnym A oraz dla każdego ograniczenia górnego M' zbioru A $M \leq M'$.

Kres górny (jeśli istnieje) jest jednoznacznie wyznaczony przez zbiór A.

M_1, M_2 - spełniają warunek Definicji (sup) to $M_1 \leq M_2$ i $M_2 \leq M_1$ zatem $M_1 = M_2$

Oznaczenie $\sup A$ - kres górny zbioru A
Podobnie definiujemy kres górny $\inf A$.

Zauważmy, że $\forall_{\varepsilon>0} \exists_{x\in A} \sup A - \varepsilon \le x$.
W przeciwnym przypadku $\sup A - \varepsilon$ jest ograniczeniem górnym A, które jest ściśle mniejsze niż $\sup A$.
Zauważmy, że $\sup(]a,b[) = b \notin]a,b[$.
Dygresja:
Podzbiory liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ mogą mieć kres górny, który nie jest liczbą wymierną. Na przykład $A = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\}$
$\sup A = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
Czy każdy ograniczony z góry podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma kres górny?
Aksjomat ciągłości (Dedekinda)
Tak, każdy ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma $\sup A$.
Uwaga: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ i $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$
Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. Czym jest $\sqrt{2}$? Jest to $\sup A$ gdzie $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$.

Przypuśćmy, że $\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną $\frac{p}{q}$ gdzie $\frac{p}{q}$ jest ułamkiem nieskracalnym.
Czyli $2q^2 = p^2$. W szczególności p^2 jest liczbą parzystą. Czyli p też; w przeciwnym przypadku $p = 2k+1$ oraz $p^2 = 4k^2+4k+1$ - nieparzysta.
Zatem $2q^2 = p^2 = (2l)^2 = 4l^2 \Rightarrow q$ - parzyste i ułamek jest skracalny.

Pierwiastki n-tego stopnia. ③

Czy każda liczba rzeczywista dodatnia posiada pierwiastek stopnia $n \in \mathbb{N}$?

Lemat (Wzór na różnicę n-tych potęg)
Dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oraz wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi równość:

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Na przykład $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

Dowód

Zauważmy na początek, że teza jest prawdziwa dla $y = 0$.
Jest też prawdziwa dla $y = 1$:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^0) \qquad (*)$$

↑ wzór na sumę ciągu geometrycznego

Ogólnie dla $y \neq 0$ mamy

$$x^n - y^n = y^n\left(\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1\right)$$ i korzystając (*)

dostajemy tezę twierdzenia

Twierdzenie Dla każdej liczby rzeczywistej $a \geq 0$ i każdej liczby naturalnej $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ istnieje dokładnie jedna liczba $b \geq 0$ taka, że $b^n = a$. Piszemy wówczas $b = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Jednoznaczność: jeśli $b_1, b_2 \geq 0$ oraz $b_1^n = b_2^n = a$
to $0 = b_1^n - b_2^n = (b_1 - b_2)\underbrace{(b_1^{n-1} + b_1^{n-2}b_2 + \ldots + b_1 b_2^{n-2} + b_2^{n-1})}$
Zatem $b_1 = b_2$ lub albo $M = 0$. Skoro M jest sumą czynników dodatnich to każdy z czynników jest równy 0. Zatem $b_1 = b_2 = 0$.

Istnienie.

Dla $a=0$ kładziemy $b=0$

Dla $a=1$ kładziemy $b=1$

Jeśli teza tw jest prawdziwa dla $a>1$ to dla $a\in]0,1[$ postępujemy następująco

(1) $a^{-1}\in]1,\infty[$ (2) Niech b $b^n=a^{-1}$

(3) $(b^{-1})^n=a$ czyli b^{-1} spełnia zał. tw.

Wystarczy więc rozważyć przypadek $a>1$.

Rozważmy zbiór $S=\{x\in\mathbb{R}: x^n\leq a\}$.

Zauważmy że jeśli $x>a$ to $x^n > a^n > a$ zatem $x\notin S$. To pokazuje, że gdy $x\in S \Rightarrow x\leq a$ i a jest ograniczeniem górnym S.

Ponadto $1\in S$, czyli S jest niepusty.

Niech $b=\sup S$. Musimy pokazać, że $b^n=a$. Należy więc wykluczyć $b^n<a$ i $b^n>a$

Przypuśćmy, że $b^n<a$. Rozważmy liczbę $\varepsilon\in]0,a[$.

$(b+\varepsilon)^n-b^n=\varepsilon\left((b+\varepsilon)^{n-1}+(b+\varepsilon)^{n-2}\cdot b+\dots+b^{n-1}\right)\leq \varepsilon n(b+a)^{n-1}$

kładąc $0<\varepsilon<\frac{a-b^n}{n(b+a)^{n-1}}$, mamy

$(b+\varepsilon)^n-\cancel{b^n}\leq a-\cancel{b^n}$ $(b+\varepsilon)^n\leq a$ czyli $b+\varepsilon\leq b$

sprzeczność.

Przypuśćmy, że $b^n>a$

$b^n-(b-\delta)^n=\delta\cdot\left(b^{n-1}+b^{n-2}(b-\delta)+\dots+(b-\delta)^{n-1}\right)\leq n\delta b^{n-1}<b^n$

jeśli $0<\delta<\frac{b^n-a}{nb^{n-1}}$, zatem $(b-\delta)^n>a\geq x^n$ czyli

$(b-\delta)^n\geq x^n$ dla $x\in S \Rightarrow b-\delta\geq x$ czyli $b-\delta\geq b$

$-\delta\geq 0$ - sprzeczność zatem $b^n=a$. ∎

Pojęcie granicy ciągu.

Definicja: Ciąg jest to funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych.
Będziemy rozważać ciągi o wyrazach rzeczywistych, czyli - zgodnie z powyższą definicją - funkcje $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wyrazy ciągu to wartości funkcji w kolejnych liczbach naturalnych.
$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{N}$ to $a(k)$ oznaczamy a_k
Ciągi można definiować przez podanie ogólnego wzoru na n-ty wyraz np. $a_n = \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$
albo przez określenie ~~rekurencyjne~~ rekurencyjne, które pozwala obliczać następny wyraz ciągu, gdy znamy już wyrazy o wcześniejszych numerach, np: $n = 0, 1, 2, \ldots$

$F_1 = F_2 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

- przybliżanie liczb rzeczywistych prostszymi (wymiernymi)
- na odwrót ciąg możemy wyrazić skomplikowanymi formułami a chcemy powiedzieć coś prostego o zachowaniu dalekich wyrazów.

Definicja (wartości bezwzględnej) Dla $x \in \mathbb{R}$ kładziemy $|x| = \begin{cases} x & \text{gdy } x \geq 0 \\ -x & \text{gdy } x < 0. \end{cases}$

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}$ to $|x-y|$ interpretujemy jako odległość x i y.

Stw Dla $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi $|x+y| \leq |x| + |y|$

Gdy x i y są tego samego znaku to nierówność (6)
jest równością.

Dla $x < 0 < y$ prawa strona $P = y - x$
a lewa $L = x + y$ lub $-x-y$.

Jeśli $L = x+y$ to nierówność jest równoważna

$$x+y \leq y-x \Leftrightarrow 2x \leq 0$$

$-x-y \leq y-x$ zachodzi $2y \geq 0$.

Definicja: Ciąg (a_n) liczb rzeczywistych jest zbieżny do granicy $g \in \mathbb{R}$ jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m > n_\varepsilon$ zachodzi $|a_m - g| < \varepsilon$.

- Ciąg, który ma granicę, nazywamy się zbieżnym.

Jeśli g jest granicą (a_n) to piszemy $g = \lim_{n\to\infty} a_n$
lub $a_n \to g$ dla $n \to \infty$.

Przykład $a_n = \frac{1}{n}$ ma granicę równą zero.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Mamy wskazać n_ε tak aby $|a_m - g| < \varepsilon$ dla $m > n_\varepsilon$

Mamy $|a_m| = \frac{1}{m} < \varepsilon$ gdy $m > \frac{1}{\varepsilon}$. Jeśli zatem $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ to dla $m > n_\varepsilon$ $|a_m| > \frac{1}{\varepsilon}$